مرور تابع‌ها

سیداحسان منبتی
گروه ریاضی
دانشگاه الزهرا

تابستان ۹۹

چکیده

متن پیش رو به منظور مرور مطالب مربوط به تابع‌ها برای دانشجویان نوورود تهیه و تنظیم شده است. در بخش اول به مفهوم تابع و ویژگی‌های آن و استفاده از انتقال‌های شناخته‌شده برای رسم نمودار توابع اشاره شده است. در بخش دوم توابع خاص، شامل توابع لگاریتمی و نمایی و توابع مثلثاتی مرور شده‌اند. در این بخش، تاکید اصلی بر ویژگی‌هایی است که خواننده برای شرکت موفق در درس‌های ریاضی عمومی دانشگاه به نظر می‌رسد به آن‌ها نیاز دارد. بخشی از نکات آموزشی در مثال‌های حل‌شده گنجانده شده‌اند. از این رو پیشنهاد می‌شود خوانندهٔ محترم در مطالعهٔ این متن به مثال‌ها نیز توجه کافی بفرمایند. قسمت‌هایی که به نوعی خلاصه یا جمع‌بندی یک بخش هستند یا به نظر مهم می‌رسند در جعبه‌هایی، از متن اصلی جدا شده‌اند.

بخش ۱

تابع

اگر y متغیری باشد که مقدار آن با مقدار متغیر دیگری مانند x تعیین شود، در این حالت گوییم «y تابعی از x» است. در واقع، وقتی می‌گوییم y تابعی از x یعنی متغیر x می‌تواند به طور مستقل مقادیری را اختیار کند و متغیر y ناچار است مقدار خود را براساس مقدار متغیر x تعیین کند. توجه کنید که نام‌های y و x به عنوان قرارداد برای کمیت‌های واقعی به کار می‌روند. با چند مثال زیر می‌خواهیم بررسی کنیم که کدام متغیر تابعی از متغیر دیگر است.

مثال ۱. فرض کنیم a نشان دهندهٔ یک عدد مثبت صحیح کمتر از ۱۰۰ و b نشان دهندهٔ تعداد مقسوم‌علیه‌های a باشد. در این صورت «a تابعی از b» است یا «b تابعی از a»؟ به عنوان مثال اگر a برابر ۶ باشد آنگاه b برابر ۴ خواهد بود. برای تشخیص این موضوع باید ببنیم با معلوم بودن کدام متغیر می‌توان مقدار متغیر دیگر را تعیین کرد. در این مثال، آیا اگر مقدار b معلوم باشد می‌توان مقدار a را تعیین کرد؟ مثلاً اگر بدانیم $b = ۴$ آیا می‌توانیم مقدار a را تعیین کنیم؟ واضح است که نمی‌توانیم! چون بیش از یک عدد وجود دارد که تعداد مقسوم‌علیه‌هایشان برابر ۴تاست. اما اگر مقدار a معلوم باشد آنگاه به راحتی می‌توان مقدار b را تعیین کرد. بنابراین می‌توانیم بگوییم b تابعی از a است.

مثال ۲. فرض کنیم a نشان دهندهٔ سن یک فرد برحسب سال و b نشان دهندهٔ تعداد روزهایی باشد که از روز تولد او می‌گذرد. اگر مقدار bیعنی تعداد روزهای گذشته از تولد فرد معلوم باشد به راحتی می‌توان سن فرد را برحسب سال یعنی a محاسبه کرد. بنابراین می‌توان گفت a تابعی از b است. ولی اگر سن فرد برحسب سال یعنی a معلوم باشد، نمی‌توان به طور دقیق گفت چند روز از تولد او گذشته است. مثلاً کسی که یک‌ساله است ممکن است ۳۶۵ روز یا ۳۷۰ روز از تولدش گذشته باشد.

مثال ۳. فرض کنیم a نشان دهندهٔ سن فرد و b نشان دهندهٔ درآمد سالیانهٔ او باشد. در این صورت نه a تابعی از b است و نه b تابعی از a است؛ چون با معلوم بودن یکی نمی‌توان مقدار دیگری را تعیین کرد.

بنابراین نکتهٔ مهم برای این که کمیت y تابع کمیت x باشد این است که بتوان مقدار y را به طور دقیق از روی مقدار x تعیین کرد. به متغیر x **متغیر مستقل** و به y **متغیر وابسته** می‌گوییم.

تعریف ۱. یک **تابع** قانونی است که هر عضو یک مجموعه را به یک عضو منحصر به فرد از یک مجموعهٔ دیگر مرتبط می‌کند. به عبارت دیگر، تابع را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف کرد که در آن هیچ دو زوج مرتبی وجود ندارد که دارای مولفه‌های اول یکسان و مولفه‌های دوم متفاوت باشند.
در این نمایش به مجموعهٔ مولفه‌های اول **دامنه** و به مجموعهٔ مولفه‌های دوم **برد** می‌گوییم. معمولاً دامنهٔ تابع f را به D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

با چند مثال نکات گفته شدهٔ اخیر را مرور می‌کنیم.

مثال ۴. مجموعهٔ $f=\{(۰,۱),(۲,۱),(۳,۴)\}$ یک تابع است. زیرا به هر یک اعضای مجموعهٔ دامنه $\{۰,۲,۳\}$ یک عضو از مجموعهٔ برد $\{۱,۴\}$ را نظیر کرده است. ولی مجموعهٔ $f=\{(۰,۱),(۰,۲),(۳,۴)\}$ تابع نیست. زیرا به عضو ۰ دو مقدار نظیر کرده است. در واقع با در دست داشتن مقدار ۰ نمی‌دانیم مقدار نظیرش در $\{۱,۴\}$ چیست.

مثال ۵. مجموعهٔ زیر یک تابع است

$$g=\{(۲,۱),(۴,۲),(۶,۳),(۸,۴)\}.$$

این مجموعه را به صورت زیر هم می‌توان نمایش داد

$$g=\left\{(x,y)\ :\ x\in\{۲,۴,۶,۸\},\ y=\frac{x}{۲}\right\}.$$

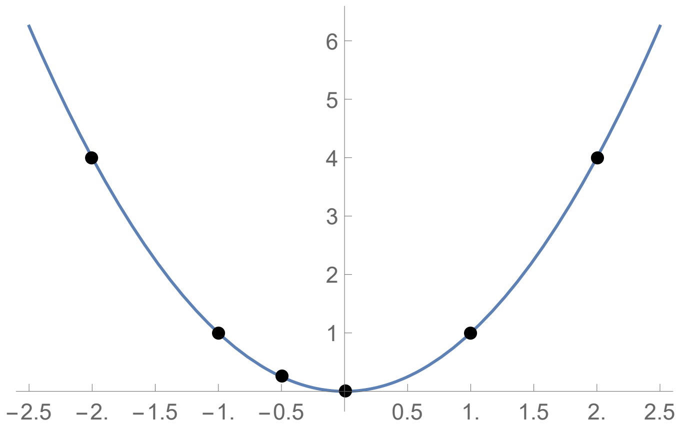
مثال ۶. مجموعهٔ زیر یک تابع نیست

$$h=\left\{(x,y)\ :\ x\in\mathbb{R},\ y^{۲}=x\right\}.$$

توجه کنید وقتی می‌گوییم این مجموعه تابع نیست منظورمان این است که y تابعی از x نیست. زیرا اگر مثلاً مقدار x برابر ۴ باشد، نمی‌توانیم مقدار y را به صورت یکتا تعیین کنیم؛ مقدار y می‌تواند ۲ یا ۲− باشد.

تا اینجا با یکی از روش‌های نمایش تابع‌ها یعنی زوج‌های مرتب آشنا شدیم. معمولاً وقتی دامنه و برد یک تابع زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند می‌توان تابع را با استفاده از دستگاه مختصات نمایش داد. بدین شکل که می‌توانیم دامنه را روی یک محور افقی و برد را روی یک محور عمودی نشان دهیم. هر دو این محورها، محور اعداد حقیقی هستند. معمولاً به محور افقی **محور** x و به محور عمودی **محور** y گفته می‌شود. مثلاً رابطهٔ $y=x^{۲}$ متغیر y را به عنوان متغیری وابسته به متغیر x معرفی می‌کند. برای نمایش این تابع در دستگاه مختصات مقادیر مختلفی برای x در نظر می‌گیریم و مقدار نظیر برای y را محاسبه می‌کنیم. سپس نقطه‌های حاصل را در دستگاه رسم می‌کنیم. ما مقادیر جدول زیر را در نظر گرفتیم

x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۲
y	۴	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	۱	۴

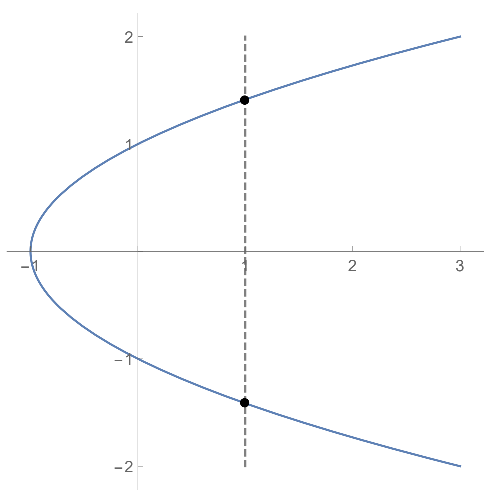


شکل ۱.۱: نمایش تابع $y = x^2$ در دستگاه مختصات

همان طور که ملاحظه می‌کنید، ما با رسم چند نقطه از تابع، شکل کلی نمایش آن را حدس زدیم و سپس با متصل کردن آن نقاط به هم آن را در دستگاه نمایش دادیم. البته این روش نمایش خیلی مطمئن نیست. چون ممکن است تابع در جاهایی که ما مقداردهی نکرده‌ایم رفتاری پیش‌بینی نشده داشته باشد. در بخش‌های آینده روش‌های مطمئن‌تری برای نمایش تابع‌ها در دستگاه مختصات ارائه خواهیم داد.

تعریف ۲. اگر دامنه و برد تابع زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند، به مجموعهٔ نقاط نمایش تابع در دستگاه مختصات دکارتی **نمودار تابع** گوییم.

مثال ۷. آیا شکل زیر می‌تواند نشان دهندهٔ نمودار یک تابع باشد با این فرض که اعضای دامنه را روی محور x و اعضای برد را روی



شکل ۲.۱: نموداری از یک رابطه

محور y نشان داده‌ایم، با رسم یک خط عمودی روی یکی از اعضای دامنه، معلوم می‌شود که آن عضو به چه اعضایی از برد نظیر

شده است. بنابراین اگر یک خط عمودی در دو جا شکل را قطع کند، یکی از اعضای دامنه به دو تا از اعضای برد نظیر شده است. در شکل ۲.۱ خط عمودی رسم شده به نقطهٔ $x = ۱$ از دامنه، دو عضو برد را نظیر کرده است. بنابراین شکل رسم شده نمی‌تواند نمودار یک تابع باشد.

یک راه دیگر برای نمایش تابع‌ها استفاده از نام تابع است. این نمایش را با یک مثال معرفی می‌کنیم. نمایش مجموعه‌ای تابع زیر را در نظر بگیرید

$$g = \{(۲, ۱), (۴, ۲), (۶, ۳), (۸, ۴)\}.$$

چون تابع g عدد ۲ را به ۱ مرتبط می‌کند، می‌نویسیم $g(۲) = ۱$. به طور مشابه می‌نویسیم $g(۴) = ۲$، $g(۶) = ۳$ و $g(۸) = ۴$. این نمادگذاری را **نمادگذاری تابعی** می‌گوییم.

مثال ۸. فرض کنیم y تابعی از x باشد به طوری که $y = x^۲$ و $x \in \mathbb{R}$. اگر بخواهیم از زوج مرتب برای نشان دادن این تابع استفاده کنیم می‌توانیم بنویسیم

$$f = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, y = x^۲\}.$$

این تابع هر عضو مانند x از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را به $x^۲$ نظیر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت $y = f(x) = x^۲$. مثلاً داریم $f(۱) = ۱^۲ = ۱$، $f(-۳) = (-۳)^۲ = ۹$ و $f(۲) = ۲^۲ = ۴$.

تمرین ۱. فرض کنیم

$$h = \{(۱, ۴), (۶, ۰), (۷, ۹)\}, \quad f(x) = \sqrt{x - ۳}$$

در این صورت مقادیر زیر را محاسبه کنید: (الف) $h(۷)$ ، (ب) مقدار w اگر $h(w) = ۰$، (پ) $f(۷)$ و (ت) مقدار x اگر $f(x) = ۵$.

تعریف یک تابع به صورت $g(x) = ۲x + ۱$ فقط بیان می‌کند رابطهٔ بین مولفهٔ اول و دوم چیست. در این نمایش متغیر x فقط نامی است که ما برای مؤلفهٔ اول در نظر می‌گیریم و ارتباط مؤلفهٔ دوم با مؤلفهٔ اول را به وسیلهٔ آن تعیین می‌کنیم. به این متغیر، **متغیر ظاهری** گفته می‌شود. حرف انگلیسی به کار رفته برای متغیر ظاهری اصلاً مهم نیست. این تابع را می‌توان به صورت $g(t) = ۲t + ۱$ یا $g(\blacksquare) = ۲\blacksquare + ۱$ هم نوشت.

وقتی تابع f اعضای مجموعهٔ A را به اعضای مجموعهٔ B نظیر می‌کند، می‌نویسیم $f : A \to B$. همواره تعریف تابع باید به همراه دامنه و برد باشد. اما در برخی مواقع می‌توان برد تابع را از روی دامنه تعیین کرد. همچنین، مواردی وجود دارد که در آن‌ها منظور از دامنه بزرگترین مجموعهٔ ممکن برای مولفه‌های اول است.

مثال ۹. دامنه و برد تابع $f(x) = x^۲$ را تعیین کنید. ما انتظار داریم کسی که تابع را تعیین می‌کند دامنه و برد آن را هم بگوید. منظور این سوال این است که بزرگترین دامنهٔ ممکن برای این تابع چیست. با توجه به ضابطهٔ تابع واضح است که هر عضو دلخواه

از $\mathbb{R}$ را می‌توانیم به جای x بگذاریم. ولی برد آن با توجه به این که برای هر x مقدار $x^۲$ نامنفی است، برابر می‌شود با مجموعهٔ اعداد نامنفی. یعنی

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = [۰, \infty).$$

مثال ۱۰. دامنه و برد تابع $g(t) = \sqrt{۲t - ۱}$ را تعیین کنید. بزرگترین دامنهٔ ممکن برای این تابع وقتی است که عبارت زیر ریشه‌گیری نامنفی باشد. بنابراین باید داشته باشیم $۲t - ۱ \geq ۰$ یا به طور معادل $t \geq \frac{۱}{۲}$. بنابراین $D_g = [\frac{۱}{۲}, \infty)$. از طرفی می‌دانیم مقدار $g(t)$ همواره نامنفی است. پس $R_g = [۰, \infty)$.

همان طور که در مثال‌های اخیر ملاحظه کردید، محاسبهٔ دامنه تابع به حل تعدادی معادله یا نامعادله و محاسبهٔ برد، معمولاً، به شناخت از تابع مورد نظر منجر می‌شود. در بخش حد و مشتق به عنوان یکی از کاربردهای حد و مشتق، با روش‌های نوینی برای محاسبهٔ برد آشنا خواهید شد.

مثال ۱۱. فرض کنید $f(x) = ۲x - ۳$. می‌خواهیم هر یک از عبارت‌های زیر را ساده‌سازی کنیم. (الف) $f(a)$ ، (ب) $f(a+۱)$، $f(x+h) - f(x)$.

(الف)

$$f(a) = ۲a - ۳$$

(ب)

$$f(a+۱) = ۲(a+۱) - ۳ = ۲a + ۲ - ۳ = ۲a - ۱$$

(پ)

$$f(x+h) - f(x) = \overbrace{۲(x+h) - ۳}^{f(x+h)} - \overbrace{(۲x - ۳)}^{f(x)} = ۲x + ۲h - ۳ - ۲x + ۳ = ۲h$$

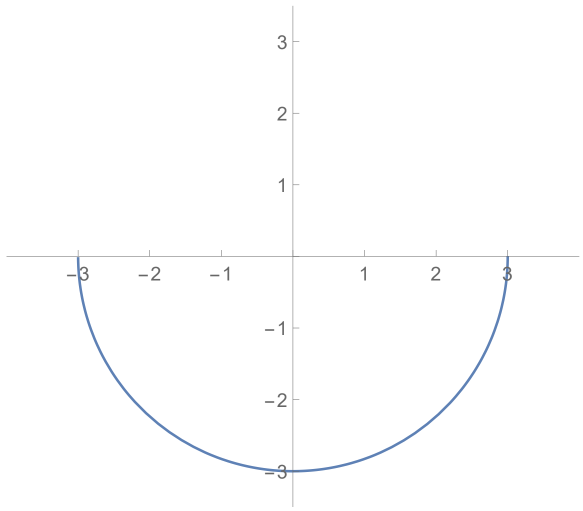
تمرین ۲. با فرض $g(t) = t^۲ - ۲$، هر یک از عبارت‌های زیر را ساده‌سازی کنید. (الف) $g(x-۲)$، (ب) $g(x+h) - g(x)$، (پ) $g(a+۱)$.

تعریف ۳. دو تابع f و g را مساوی گوییم هرگاه اولاً $D_f = D_g$ و ثانیاً برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

مثال ۱۲ (نمودار نیم‌دایره)**.** نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$y = -\sqrt{۹ - x^۲}$$

با مربع کردن طرفین داریم $y^۲ = ۹ - x^۲$ یا $x^۲ + y^۲ = ۹$. این رابطه برای نقاطی از صفحه برقرار است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات برابر ۳ باشد؛ یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳. با توجه به رابطهٔ داده شده برای y، فقط مقادیر نامثبت قابل‌قبول هستند (شکل ۳.۱ را ببینید). پس نمودار تابع داده شده، نیمهٔ پایینی دایره است. در واقع نمودار تابع‌های به شکل $y = \pm\sqrt{r^۲ - x^۲}$، نیم‌دایرهٔ بالایی (با علامت $+$) یا نیم‌دایرهٔ پایینی (با علامت $-$) با شعاع r است.



شکل ۳.۱: نمودار نیم‌دایره $y = -\sqrt{۹ - x^۲}$

مثال ۱۳ (خط)**.** از مطالب گذشته می‌دانیم معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $(a_۱, b_۱)$ و $(a_۲, b_۲)$ می‌گذرد عبارت است از

$$y - b_۱ = m(x - a_۱),$$

که در آن m شیب خط و برابر $\frac{b_۲ - b_۱}{a_۲ - a_۱}$ است. با کمی ساده‌سازی داریم

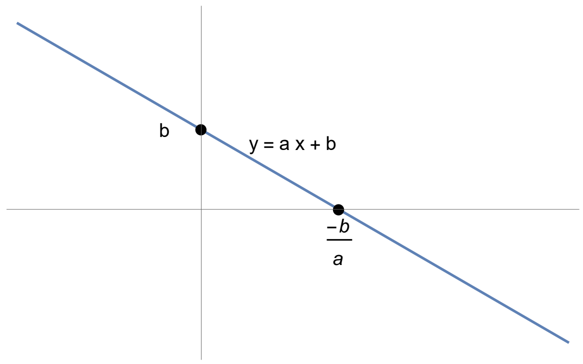
$$y = mx + ma_۱ + b_۱.$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید در اینجا یک رابطهٔ صریح بین دو متغیر y و x بیان شده است. این نشان می‌دهد که y تابعی از x است. به این تابع، تابعی خطی می‌گوییم. یک تابع خطی را به صورت $ax + by + c = ۰$ یا $y = ax + b$ نیز نشان می‌دهیم که در آن a، b و c اعداد ثابتی هستند. به راحتی ملاحظه می‌شود که نمودار تابع خطی $y = ax + b$ به صورت شکل ۴.۱ است. عدد b را عرض از مبدأ و عدد $\frac{-b}{a}$ را طول از مبدأ خط نیز می‌نامیم. این‌ها نقاطی هستند که نمودار یک خط، به ترتیب، محور y و محور x را قطع می‌کند. برای رسم یک خط کافی است این دو نقطه را رسم کنیم و به هم وصل کنیم.

مثال ۱۴ (تابع چندضابطه‌ای)**.** همهٔ توابعی که در مثال‌های اخیر دیدیم با یک ضابطه در دامنهٔ خود تعریف می‌شدند. توابعی نیز وجود دارند که در بخش‌های مختلف دامنه به ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند. این تابع‌ها را توابع چندضابطه‌ای گوییم. یکی از معروف‌ترین توابع این دسته را در ادامه معرفی می‌کنیم.

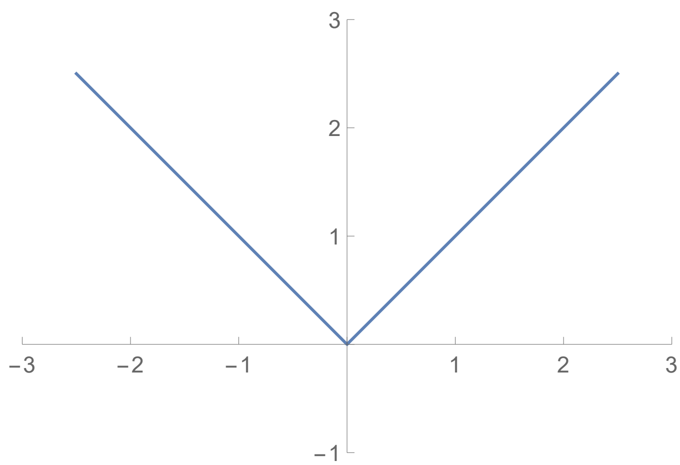
تابع قدرمطلق، تابعی است که به هر عدد حقیقی فاصلهٔ آن تا مبدأ را نظیر می‌کند. مثلاً قدرمطلق عدد ۳ می‌شود ۳ و قدرمطلق عدد ۲− می‌شود ۲؛ چون اگر ۲− را روی محور بگذاریم می‌بینیم که فاصلهٔ آن تا مبدأ برابر ۲ می‌شود. دامنهٔ تابع قدرمطلق $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد حقیقی نامنفی است. قدرمطلق عدد x را با $|x|$ نشان می‌دهیم. تعریف این تابع را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$



شکل ۴.۱: نمودار تابع خطی $y = ax + b$.

در تعریف این تابع دامنهٔ آن یعنی $\mathbb{R}$ به دو بخش تقسیم شده و ضابطهٔ تابع روی هر بخش متفاوت است. نمودار این تابع را در شکل ۵.۱ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۵.۱: نمودار تابع $|x|$

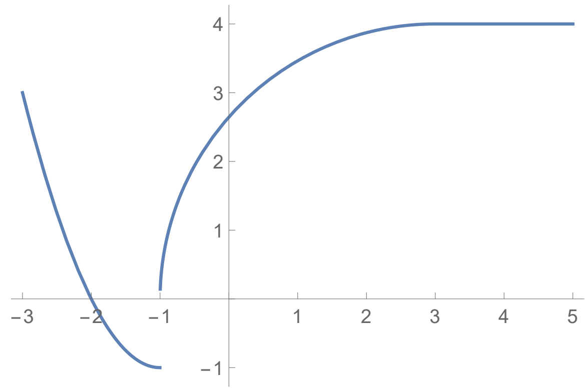
در ادامه یکی دیگر از ویژگی‌های توابع روی اعداد حقیقی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴. تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید که A و B هر دو زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند. فرض کنیم I یک بازه در دامنهٔ f باشد؛ یعنی $I \subseteq A$. در این صورت گوییم

- تابع f روی I صعودی است هرگاه برای $a, b \in I$ که $a < b$ داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$. یعنی هر چه در طول محور x از سمت چپ به راست پیش می‌رویم مقدار تابع کمتر نمی‌شود. تابع را صعودی اکید یا اکیداً صعودی گوییم هرگاه برای هر $a < b$ داشته باشیم $f(a) < f(b)$.

- تابع f روی I نزولی است هرگاه برای هر $a, b \in I$ که $a < b$ داشته باشیم $f(b) \leq f(a)$. تابع را نزولی اکید یا اکیداً نزولی گوییم هرگاه برای هر $a < b$ داشته باشیم $f(b) < f(a)$.
- تابع f روی I ثابت است هرگاه عدد k موجود باشد که برای هر $a \in I$ داشته باشیم $f(a) = k$. اگر تابع f روی کل دامنهٔ خود عددی ثابت باشد معمولاً هنگام تعریف می‌نویسیم $f(x) \equiv k$.

مثال ۱۵. نمودار تابع f را به صورت شکل ۶.۱ در نظر بگیرید. این تابع در بازهٔ $(-\infty, -۱]$ تابعی نزولی، روی بازهٔ $(-۱, ۳)$ صعودی و روی بازهٔ $[۳, ۵]$ ثابت است.

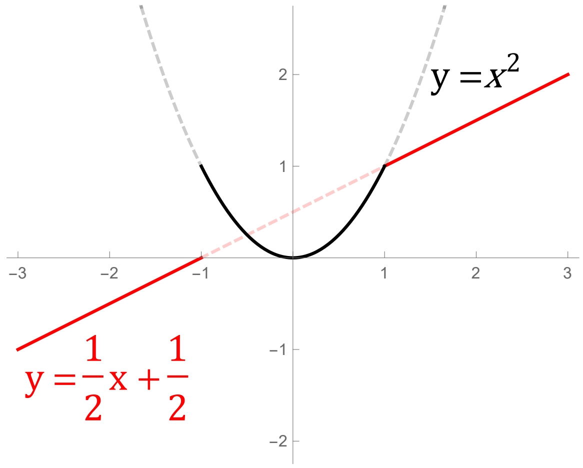


شکل ۶.۱: نمودار تابع f و وضعیت آن در بازه‌های مختلف

مثال ۱۶. تابع چندضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$g(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & |x| \geq ۱ \\ x^۲ & |x| < ۱ \end{cases}$$

تابع g با دو ضابطه تعریف شده است. یکی برای مقادیری از x که $|x| \geq ۱$ و دیگری برای مقادیری که $|x| < ۱$. مجموعهٔ xهایی که $|x| \geq ۱$ را می‌توان به این صورت که $x \geq ۱$ یا $x \leq -۱$ نشان داد. بنابراین، روی این دسته از xها ضابطهٔ تابع $۲x - ۱$ است. برای رسم تابع ابتدا $۲x - ۱$ را روی $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم و نمودار این تابع که مربوط به $|x| \geq ۱$ نمی‌شود را حذف می‌کنیم. در شکل ۷.۱ این نمودار با رنگ قرمز نشان داده شده است. بخش خط‌چین مربوط به بخشی از نمودار $y = ۲x - ۱$ می‌شود که خارج از ناحیهٔ $|x| \geq ۱$ است. به طور مشابه مجموعهٔ تمام xهایی که در $|x| < ۱$ صدق می‌کنند معادل xهایی است که در $-۱ < x < ۱$ صدق می‌کنند. روی این مجموعه تابع $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم. در شکل ۷.۱ این نمودار را با رنگ مشکلی ملاحظه می‌کنید. در نهایت اجتماع بخش‌های مشکی و قرمز نمودار نهایی g را می‌سازند.



شکل ۷.۱: نمودار یک تابع چندضابطه‌ای

تعریف ۵. تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید که A و B هر دو زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند.

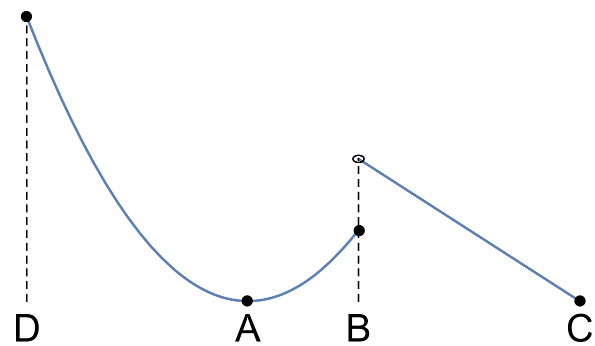
- نقطهٔ $a \in A$ را یک **مینیمم‌کنندهٔ نسبی اکید** تابع f گوییم هرگاه مقدار تابع در نقطه a از مقدار تابع در «نقاط مجاورش» کمتر باشد. در این حالت $f(a)$ را **مقدار می‌نیمم نسبی اکید** تابع f گوییم. منظور از «نقاط مجاور» نقطهٔ a در تعریف اخیر تمام نقاطی است که با مقدار کمی حرکت از a به چپ یا راست به آن‌ها می‌رسیم.
- نقطهٔ $a \in A$ را یک **ماکزیمم‌کنندهٔ نسبی اکید** تابع f گوییم هرگاه مقدار تابع در نقطه a از مقدار تابع در «نقاط مجاورش» بیشتر باشد. در این حالت $f(a)$ را **مقدار ماکزیمم نسبی اکید** تابع f گوییم.
- نقطهٔ $a \in A$ را یک **مینیمم‌کنندهٔ سراسری اکید** تابع f روی A گوییم هرگاه مقدار تابع در نقطهٔ a از مقدار تابع در سایر نقاط A کمتر باشد. $f(a)$ را **مقدار مینیمم سراسری اکید** تابع f روی A گوییم.
- نقطهٔ $a \in A$ را یک **ماکزیمم‌کنندهٔ سراسری اکید** تابع f روی A گوییم هرگاه مقدار تابع در نقطهٔ a از مقدار تابع در سایر نقاط A بیشتر باشد. $f(a)$ را **مقدار ماکزیمم سراسری اکید** تابع f روی A گوییم.
- نقطهٔ a را یک **اکسترمم‌کنندهٔ نسبی اکید** گوییم هرگاه مینیمم‌کنندهٔ نسبی اکید یا ماکزیمم‌کنندهٔ نسبی اکید باشد. اکسترمم‌کنندهٔ سراسری اکید به طور مشابه تعریف می‌شود.

در تعریف فوق ما شکل «اکید» مفاهیم را تعریف کردیم. اگر مثلاً در تعریف مینیمم‌کنندهٔ سراسری اکید مقدار تابع در نقطهٔ a نابیشتر از مقدار تابع در سایر نقاط باشد آنگاه a را مینیمم‌کنندهٔ سراسری گوییم. تفاوت «مینیمم‌کنندهٔ سراسری اکید» با «مینیمم‌کنندهٔ سراسری» در این است که اگر a یک مینیمم‌کننده سراسری باشد ممکن است مقدار آن با مقدار تابع در یک نقطهٔ دیگر مساوی هم باشد اما در شکل «اکید»، $f(a)$ اکیداً از f سایر نقاط کمتر است. شکل غیر اکید مفاهیم تعریف فوق به طور مشابه تعریف

می‌شوند.

مثال ۱۷. تابع $f(x) = (x-۱)^۲$ را در نظر بگیرید. داریم $f(۱) = ۰$ و برای هر $x \neq ۱$ داریم $f(x) > f(۱)$. یعنی مقدار f در نقطهٔ $a = ۱$ از مقدار تابع در سایر نقاط دامنه کمتر است. بنابراین $a = ۱$ مینیمم‌کنندهٔ سراسری اکید تابع f روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۸. شکل ۸.۱ نمودار تابع g را نشان می‌دهد. در این شکل A یک مینیمم‌کنندهٔ سراسری و در عین حال مینیمم‌کنندهٔ نسبی نیز هست در حالی که B اکسترمم نیست. همچنین C مینیمم‌کنندهٔ سراسری است ولی نسبی نیست زیرا نمی‌توان آن را با همهٔ نقاط مجاور آن مقایسه کرد؛ در واقع نقاط سمت چپ آن در دامنه تابع نیستند. نقطهٔ D یک ماکزیمم‌کنندهٔ سراسری است.



شکل ۸.۱: اکسترمم‌های نسبی و سراسری تابع g

توجه کنید که در این بخش فقط می‌خواهیم با مفهوم اکسترمم تابع آشنا شویم. نحوهٔ محاسبهٔ اکسترمم‌های یک تابع را در بخش‌های آتی خواهید دید.

۱.۱ نمودار تابع

در بخش قبل با مفهوم نمودار تابع (در تعریف ۲) آشنا شدیم. در این بخش با قوانینی آشنا می‌شویم که با استفاده از آن‌ها می‌توان از روی نمودار یک تابع، نمودار توابع شبیه آن را رسم کرد. در تمام موارد این بخش فرض می‌کنیم نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم است. برای استفاده از این تبدیلات برای رسم توابع، معمولاً فرایند زیر را انجام می‌دهیم: ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس نقاط تلاقی نمودار $y = f(x)$ با محورها و نقاط اکسترمم آن را مشخص می‌کنیم. تبدیل گفته شده را روی نقاط مشخص‌شده انجام می‌دهیم و با استفاده از این نقاط راهنما تلاش می‌کنیم نمودار حاصل از انجام تبدیل روی $y = f(x)$ را رسم کنیم.

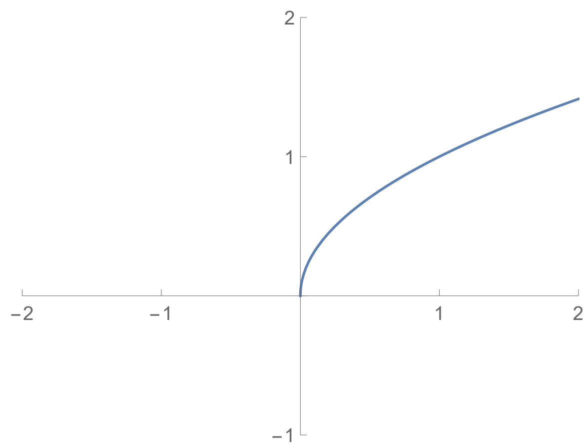
۱.۱.۱ انتقال

تعریف ۶ (انتقال افقی)**.** فرض کنیم $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد در این صورت

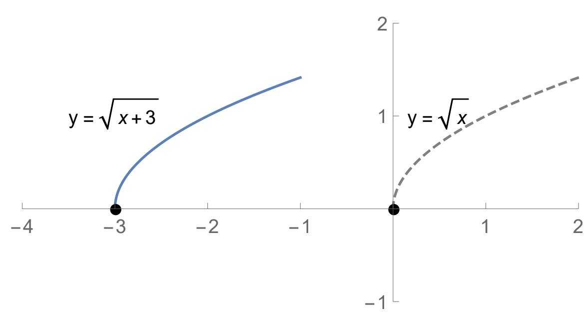
انتقال افقی به راست نمودار تابع $y = f(x - a)$ با انتقال افقی نمودار $y = f(x)$ به اندازهٔ a واحد به سمت راست به دست می‌آید.

انتقال افقی به چپ نمودار تابع $y = f(x + a)$ با انتقال افقی نمودار $y = f(x)$ به اندازهٔ a واحد به سمت چپ به دست می‌آید.

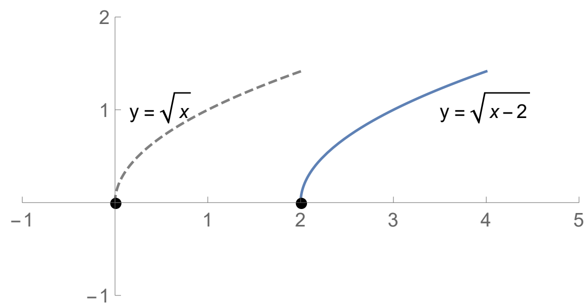
مثال ۱۹. می‌دانیم نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر است



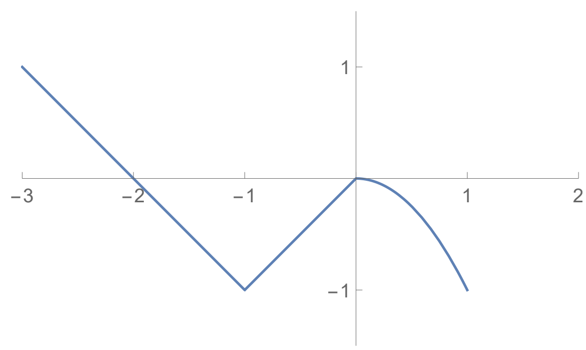
برای رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ کافی است نمودار تابع $\sqrt{x}$ را سه واحد به سمت چپ منتقل کنیم. طبق آنچه پیشتر پیشنهاد شد بهتر است ابتدا نقاط راهنما (نقاط محل برخورد نمودار با محورها و نقاط اکسترمم) را منتقل کنیم و سپس با استفاده از این نقاط، نمودار جدید را رسم کنیم.



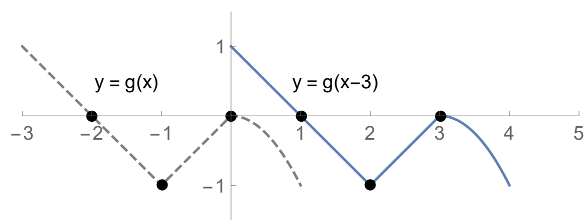
نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$ نمودار تابع $\sqrt{x}$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.



مثال ۲۰. فرض کنیم نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر است



در این صورت نمودار تابع $y = g(x - ۳)$ را می‌توان با انتقال نمودار $y = g(x)$ به اندازهٔ سه واحد به راست به دست آورد.

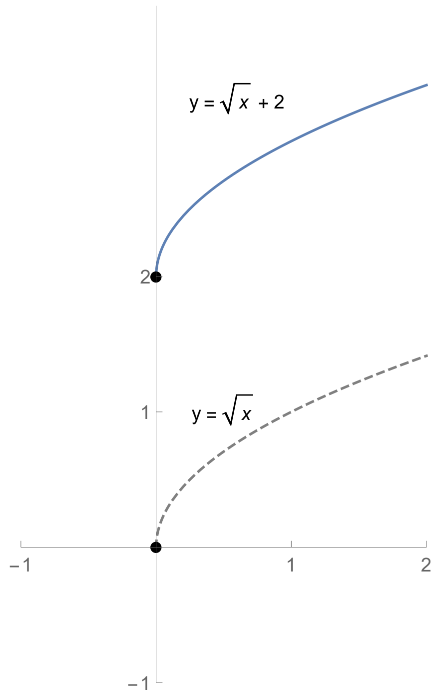


تعریف ۷ (انتقال عمودی). فرض کنیم $a > ۰$ یک عدد حقیقی باشد در این صورت

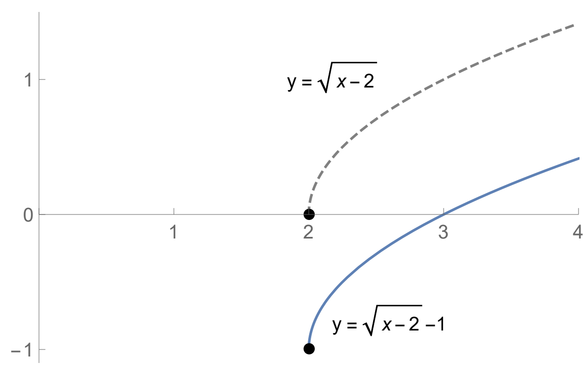
انتقال عمودی به بالا نمودار تابع $y = f(x) + a$ با انتقال عمودی نمودار $y = f(x)$ به اندازهٔ a واحد به بالا به دست می‌آید.

انتقال عمودی به پایین نمودار تابع $y = f(x) - a$ با انتقال افقی نمودار $y = f(x)$ به اندازهٔ a واحد به پایین به دست می‌آید.

مثال ۲۱. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ در مثال ۱۹ نشان داده شده است. نمودار تابع $y = \sqrt{x} + ۲$ را می‌توان با انتقال دو واحد به بالا به صورت زیر رسم کرد



مثال ۲۲. نمودار تابع $y = \sqrt{x - ۲}$ در مثال ۱۹ نشان داده شده است. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $y = \sqrt{x - ۲} - ۱$ به دست می‌آید.



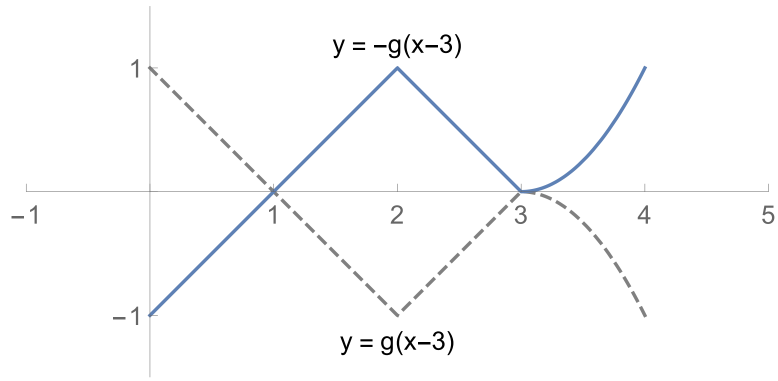
در این مثال استفادهٔ هم‌زمان از انتقال افقی و عمودی را ملاحظه کردید.

۲.۱.۱ انعکاس

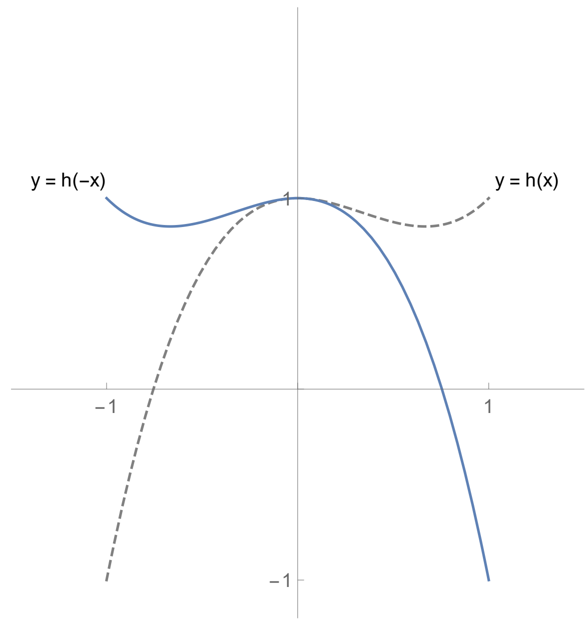
انعکاس نسبت به محور x نمودار تابع $y = -f(x)$ با قرینه کردن نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x به دست می‌آید.

انعکاس نسبت به محور y نمودار تابع $y = f(-x)$ با قرینه کردن نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y به دست می‌آید.

مثال ۲۳. نمودار تابع $y = g(x - ۳)$ را مشابه آنچه در مثال ۲۰ آمده است در نظر بگیرید. نمودار تابع $y = -g(x - ۳)$ را می‌توان با قرینه کردن نسبت به محور x به دست آورد. بدین منظور ابتدا قرینهٔ نقاط راهنمای $(۱, ۰)$، $(۲, -۱)$، $(۳, ۰)$ و $(۰, ۱)$ را به دست می‌آوریم. سپس تلاش می‌کنیم با استفاده از این نقاط انعکاس $y = g(x)$ را رسم کنیم.



مثال ۲۴. نمودار تابع $h(x) = x^۳ - x^۲ + ۱$ و نمودار $y = h(-x)$ را در شکل زیر ملاحظه می‌کنید



۳.۱.۱ انقباض و انبساط

تعریف ۸. فرض کنیم $a > ۰$ یک عدد حقیقی باشد در این صورت

انقباض افقی اگر $a > ۱$ آنگاه نمودار تابع $y = f(ax)$ در راستای محور x کشیدگی کمتری نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد.

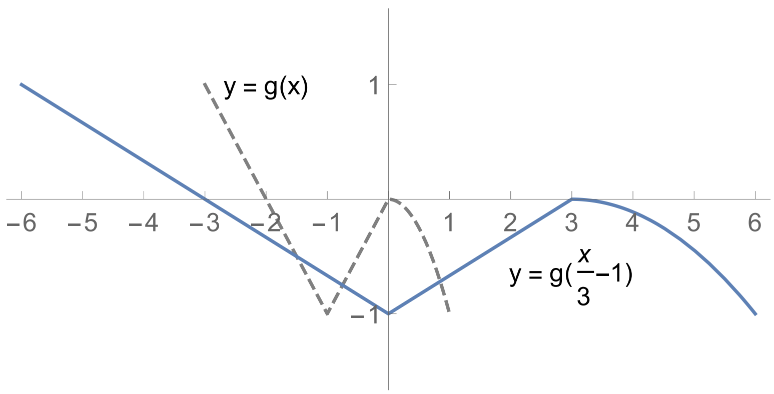
انبساط افقی اگر $a < ۱$ آنگاه نمودار تابع $y = f(ax)$ در راستای محور x کشیدگی بیشتری نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد.

انقباض عمودی اگر $a > ۱$ آنگاه نمودار تابع $y = af(x)$ در راستای محور y کشیدگی کمتری نسبت به نمودار

$y = f(x)$ دارد.

انبساط عمودی اگر $1 < a$ آنگاه نمودار تابع $y = af(x)$ در راستای محور y کشیدگی بیشتری نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد.

مثال ۲۵. نمودار تابع $y = g(x-3)$ را مشابه آنچه در مثال ۲۰ آمده است در نظر بگیرید. تابع $y = g(\frac{x}{3} - 1)$ در راستای محور x کشیدگی بیشتری نسبت به $y = g(x-3)$ دارد. در اینجا داریم $a = \frac{1}{3}$. برای رسم نمودار این تابع از نمودار خود $y = g(x)$ استفاده می‌کنیم. با نقطهٔ راهنمای $(0, 0)$ شروع می‌کنیم. این نقطه روی منحنی است بنابراین داریم $g(0) = 0$. می‌خواهیم ببینیم این نقطه، به چه نقطه‌ای روی نمودار $y = g(\frac{x}{3} - 1)$ منتقل می‌شود. اگر عبارت داخل پرانتز مقابل g برابر صفر باشد، آنگاه مقدار g در آن برابر صفر خواهد بود. اما این عبارت در چه صورت صفر خواهد بود؟ یعنی برای چه x داریم $\frac{x}{3} - 1 = 0$. در نتیجه اگر $x = 3$ آنگاه عبارت داخل پرانتز صفر می‌شود. لذا نقطهٔ $(3, 0)$ روی منحنی $y = g(\frac{x}{3} - 1)$ قرار دارد. به طور مشابه نقطهٔ راهنمای $(-1, -1)$ به نقطهٔ $(0, -1)$، نقطهٔ راهنمای $(-2, 0)$ به $(-3, 0)$ و نقطهٔ $(-3, 1)$ به نقطهٔ $(-6, 1)$ منتقل می‌شود. با استفاده از نقاط به دست آمده می‌توان نمودار مورد نظر را رسم کرد.



توجه کنید که روش استفاده شده در این مثال را می‌توان در اغلب تبدیل‌های پیچیده به کار برد.

۴.۱.۱ تقارن

تعریف ۹. نمودار $y = f(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید دامنهٔ f چنان باشد که اگر $x \in D_f$ آنگاه $-x \in D_f$ در این صورت

تقارن نسبت به محور y نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y متقارن است هر گاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(-x) = f(x)$. در این حالت گوییم تابع f زوج است.

تقارن نسبت به مبدأ نمودار $y = f(x)$ نسبت به مبدأ متقارن است هر گاه برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$. در این حالت گوییم تابع f فرد است.

مثال ۲۶. نمودار تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۲|x|$ نسبت به محور y متقارن است زیرا

$$f(-x) = ۳(-x)^۲ - ۲|-x| = ۳x^۲ - ۲|x| = f(x).$$

مثال ۲۷. نمودار تابع $f(t) = -t^۳ + ۲t^۵$ نسبت به مبدأ متقارن است زیرا

$$f(-t) = -(-t)^۳ + ۲(-t)^۵ = t^۳ - ۲t^۵ = -f(t).$$

۲.۱ اعمال جبری و ترکیب توابع

تعریف ۱۰. دو تابع f و g را در نظر بگیرید. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع را با $f+g$، $f-g$، $f.g$ و f/g نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq ۰ \text{ به شرطی که }$$

دامنهٔ توابع $f+g$، $f-g$ و $f.g$ به صورت اشتراک دامنهٔ توابع f و g، و دامنهٔ f/g به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \cap \{x \ : \ g(x) \neq ۰\}.$$

مثال ۲۸. برای توابع $f = \{(۱,۲),(-۱,۳),(۲,۱),(۰,۱)\}$ و $g = \{(۱,-۱),(۲,۴),(۰,۰)\}$ تابع $f+g$ و f/g را به دست می‌آوریم. داریم $D_f = \{۱,-۱,۲,۰\}$ و $D_g = \{۱,۲,۰\}$. بنابراین $D_{f+g} = \{۱,۲,۰\}$ و $f+g = \{(۱,۱),(۲,۵),(۰,۱)\}$. به طور مشابه $D_{f/g} = \{۱,۲\}$ و $f/g = \{(۱,-۲),(۲,\frac{۱}{۴})\}$.

مثال ۲۹. دو تابع $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ را در نظر بگیرید. با وجود این که برای هر $x \neq ۱$ داریم $f(x) = g(x)$، این دو تابع با هم برابر نیستند زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} \setminus \{۱\}$.

تعریف ۱۱. دو تابع f و g را در نظر بگیرید. ترکیب تابع f و g که آن را با $f \circ g$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad D_{f\circ g} = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\}.$$

ترکیب g با f نیز به طور مشابه به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود.

مثال ۳۰. فرض کنید $f(x) = ۲x$ و $g(x) = \sqrt{x+۱}$. مقدار $(f \circ g)(۲)$ و $(g \circ g \circ f)(-\frac{۱}{۲})$ را به دست آورید. سپس توابع $f \circ g$ و $g \circ g \circ f$ را محاسبه کنید.

حل. داریم

$$(f \circ g)(۲) = f(g(۲)) = f(\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳}, \qquad (g \circ g \circ f)(-\frac{۱}{۲}) = g(g(f(-\frac{۱}{۲}))) = g(g(-۱)) = g(۰) = ۱.$$

برای محاسبهٔ تابع $f \circ g$ ابتدا باید دامنهٔ آن را به دست آورد. توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-۱, \infty)$.

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۱, \infty) \ : \ \sqrt{x+۱} \in \mathbb{R}\} = [-۱, \infty).$$

سپس می‌توان ضابطهٔ $f \circ g$ را به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+۱}) = ۲\sqrt{x+۱}$ محاسبه کرد. برای محاسبهٔ دامنهٔ $g \circ f$ به طور مشابه عمل می‌کنیم. داریم

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\} = \{x \ : \ ۲x \in [-۱, \infty)\} = [-\frac{۱}{۲}, \infty).$$

و همچنین $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(۲x) = \sqrt{۲x+۱}$.

با توجه به این می‌توان تابع $(g \circ g \circ f)$ را نیز محاسبه کرد. ابتدا دامنهٔ آن را با استفاده از تعریف به دست می‌آوریم

$$D_{g\circ g\circ f} = \{x \in D_{g\circ f} \ : \ (g \circ f)(x) \in D_g\} = \{x \in [-\frac{۱}{۲}, \infty) \ : \ \sqrt{۲x+۱} \in [-۱, \infty)\}.$$

اما $\sqrt{۲x+۱} \in [-۱, \infty)$ همواره برقرار است، لذا عبارت آخر برابر است با $[-\frac{۱}{۲}, \infty)$. حال داریم

$$(g \circ g \circ f)(x) = g((g \circ f)(x)) = g(\sqrt{۲x+۱}) = \sqrt{\sqrt{۲x+۱}+۱}.$$

۳.۱ تابع وارون

در برخی مواقع این امکان وجود دارد که اثر یک تابع، توسط تابع دیگری قابل بازگشت باشد. مثلاً اثر تابع $y = x^۲$ روی عدد x با اعمال تابع $y = \sqrt{x}$ روی نتیجهٔ آن قابل بازگشت است. این امکان فقط برای دسته‌ای از تابع‌ها به نام تابع‌های یک‌به‌یک وجود دارد.

مثال زیر را در نظر بگیرید. هزینهٔ برگزاری مراسم عروسی در یک سالن، شامل یک هزینهٔ ورودی و هزینهٔ مربوط به تعداد مهمان‌ها می‌شود. هزینهٔ ورودی برابر ۱ میلیون تومان و هزینهٔ مربوط به پذیرایی از مهمانان، برای ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۲۵۰ نفر به ترتیب ۱، ۱٫۸، ۳ و ۳٫۵ میلیون تومان است. می‌توان هزینهٔ کل را به عنوان تابعی از تعداد مهمان‌ها نوشت.

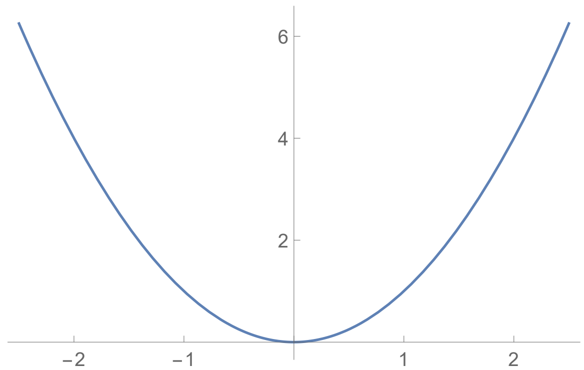
هزینهٔ کل	تعداد مهمانان
۲	۵۰
۲٫۸	۱۰۰
۴	۲۰۰
۴٫۵	۲۵۰

این تابع را C می‌نامیم. در این صورت داریم $C(۵۰) = ۲$، $C(۱۰۰) = ۲٫۸$، $C(۲۰۰) = ۴$ و $C(۲۵۰) = ۴٫۵$. توجه کنید که در این تابع رابطهٔ بین اعضای دامنه و برد به شکلی تعریف شده است که با معلوم بودن هزینه می‌توانیم به عقب بازگردیم و تعداد مهمانان را بگوییم. مثلاً اگر دوستمان بگوید ۴ میلیون برای سالن هزینه کرده است ما بلافاصله متوجه می‌شویم که او برای ۲۰۰ نفر تدارک دیده است. چنین تابعی را یک‌به‌یک می‌گوییم.

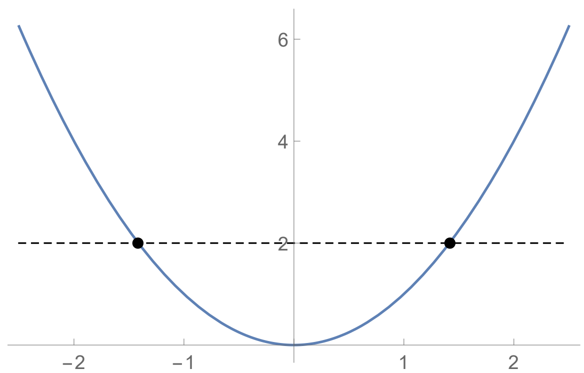
تعریف ۱۲. تابع f را یک‌به‌یک گوییم هر گاه نظیر هر عضو از برد فقط و فقط یک عضو از دامنه وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، در نمایش زوج مرتب یک تابع، اگر دو زوج مرتب مولفه‌های دوم یکسان داشته باشند، مولفه‌های اول آن‌ها نیز یکی باشد.

اینک مثال دیگری را در نظر بگیرید. یک گوی را در نظر بگیرید که آن را به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. این گوی تا نقطهٔ اوج خود ارتفاع می‌گیرد و سپس سقوط می‌کند تا دوباره به دست ما برسد. در اینجا، ارتفاع گوی را می‌توان به عنوان تابعی از زمان در نظر گرفت. در زمان صفر ارتفاع آن را صفر در نظر می‌گیریم. بعد از پرتاب، ارتفاع زیاد می‌شود تا نقطهٔ اوج، سپس ارتفاع کاهش می‌یابد تا دوباره صفر شود. در این مثال اگر ما یک نقطه از برد یعنی یک ارتفاع ثابت را در نظر بگیریم، آیا می‌توانیم بگوییم در چه زمانی گوی به این ارتفاع رسیده است؟ مشخص است که نمی‌توان زمان را تعیین کرد. زیرا ممکن است گوی هنگام اوج گرفتن به این ارتفاع رسیده باشد یا هنگام سقوط کردن. در نتیجه این تابع یک‌به‌یک نیست.

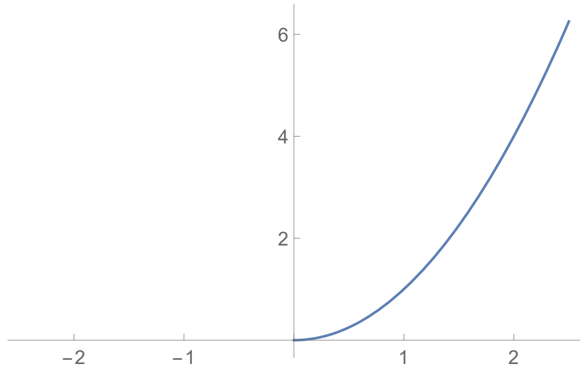
مثال ۳۱ (آزمون یک‌به‌یک بودن با نمودار تابع)**.** تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ در نظر بگیرید. نمودار این تابع به صورت زیر است



عدد ۲ را در برد تابع در نظر بگیرید. برای این که ببینیم این عدد نظیر چه اعضایی از دامنه است خط افقی $y = ۲$ را رسم می‌کنیم. با تعیین نقاط برخورد این خط با نمودار تابع می‌توان نقاط نظیر $y = ۲$ را در دامنه پیدا کرد. شکل زیر را ببینید.



همان طور که ملاحظه می‌کنید برای $y = ۲$ دو نقطه در دامنه وجود دارند که $f(x) = ۲$. بنابراین تابع f یک‌به‌یک نیست. به دو نکته در این مورد توجه کنید. نکتهٔ اول این که باید برای **هر عضو از برد**، خط افقی‌ای که از آن رسم می‌کنیم نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند. نکتهٔ دوم این که برخی از مواقع یک‌به‌یک بودن، روی بخشی از دامنهٔ تابع مورد نظر است در مثال اخیر، اگر تابع را روی به جای این که روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم روی اعداد نامنفی در نظر بگیریم نمودار آن به صورت زیر می‌شود.



این نشان می‌دهد که تابع $f(x) = x^۲$ روی مجموعهٔ اعداد نامنفی یک‌به‌یک است.

با توجه به مثال فوق می‌توان گفت اگر هر خط افقی که در برد تابع قرار دارد نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند، آنگاه تابع یک‌به‌یک است.

مثال ۳۲ (بررسی یک‌به‌یک بودن از روی ضابطهٔ تابع). آیا تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۳}$ یک‌به‌یک است؟

حل. فرض کنیم y یک مقدار دلخواه و ثابت در برد این تابع باشد. این تابع در صورتی یک‌به‌یک است که مقدار تابع در دو نقطهٔ متمایز مانند $x_۱$ و $x_۲$ برابر y نشود. حال بررسی می‌کنیم در چه صورت چنین اتفاقی می‌افتد. اگر $x_۱$ و $x_۲$ مقدار تابع برابر داشته باشند، آنگاه داریم $f(x_۱) = f(x_۲)$. با جایگذاری در ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود

$$\frac{۲x_۱ + ۱}{x_۱ - ۳} = \frac{۲x_۲ + ۱}{x_۲ - ۳}$$

و یا به طور معادل

$$۲x_۱x_۲ - ۶x_۱ + x_۲ - ۳ = ۲x_۱x_۲ - ۶x_۲ + x_۱ - ۳.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود $۷x_۱ = ۷x_۲$. لذا $x_۱ = x_۲$. چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ نتیجه این که دو مقدار **متمایز** در دامنه نمی‌توانند مقدار تابع هدف برابر داشته باشند. پس تابع داده شده یک‌به‌یک است.

مثال مربوط به هزینه‌های برگزاری مراسم در سالن را در نظر بگیرید. تابع C که در آن بخش تعریف کردیم، با تعداد مشخصی مهمانان عدد خاصی مربوط به هزینهٔ نظیر را مربوط می‌کرد. اینک می‌خواهیم تابعی از مجموعهٔ هزینه‌ها تعریف کنیم که به نوعی عکس تابع C عمل کند. به این شکل که برای هزینهٔ داده شده، تعداد مهمانان را بدهد. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G = \{(۲, ۵۰), (۲/۸, ۱۰۰), (۴, ۲۰۰), (۴/۵, ۲۵۰)\}.$$

به تابع G تابع وارون تابع C می‌گوییم.

در حالت کلی‌تر تابع وارون را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

تعریف ۱۳. فرض کنید f یک تابع یک‌به‌یک باشد. در این صورت تابع وارون f که آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم با جابجایی مولفه‌های اول و دوم تابع f به دست می‌آید.
توجه کنید که علامت -۱ روی نماد تابع را با وارون عددی اشتباه نکنید. وقتی علامت -۱ روی یک عددی ناصفر مثل a قرار می‌گیرد منظور عدد $\frac{۱}{a}$ است. در صورتی که وقتی روی نام تابع قرار می‌گیرد منظور تابع وارون آن است.

در مثال مربوط به محاسبهٔ هزینه‌های سالن داریم $C^{-۱} = G$. یعنی G تابع وارون C است.

مثال ۳۳. تابع $f = \{(-۱, ۱), (۲, -۳), (۳, -۴), (۱, -۱)\}$ یک تابع یک‌به‌یک است. تابع‌های $f^{-۱}$، $f^{-۱} \circ f$ و $f \circ f^{-۱}$ را به دست آورید.

حل. داریم

$$f^{-۱} = \{(۱, -۱), (-۳, ۲), (-۴, ۳), (-۱, ۱)\}.$$

تابع $f^{-۱} \circ f$ را می‌توان با محاسبهٔ مقدار آن در نقاط دامنه‌اش به دست آورد

$$\begin{aligned}
(f^{-۱} \circ f)(-۱) &= f^{-۱}(f(-۱)) = f^{-۱}(۱) = -۱\\
(f^{-۱} \circ f)(۲) &= f^{-۱}(f(۲)) = f^{-۱}(-۳) = ۲\\
(f^{-۱} \circ f)(۳) &= f^{-۱}(f(۳)) = f^{-۱}(-۴) = ۳\\
(f^{-۱} \circ f)(۱) &= f^{-۱}(f(۱)) = f^{-۱}(-۱) = ۱
\end{aligned}$$

پس

$$(f^{-۱} \circ f) = \{(-۱,-۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۱)\}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد $(f \circ f^{-۱}) = \{(-۱,-۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۱)\}$.

در مثال اخیر دیدیم ترکیب دو تابع f و $f^{-۱}$ تابعی است که هر عضو را به خودش نظیر می‌کند. چنین تابعی را تابع همانی گوییم. این اتفاق همواره درست است. یعنی ترکیب یک تابع و تابع وارونش همواره همانی خواهد شد.

مثال ۳۴. تابع وارون $f(x) = ۲x^۳ - ۱$ را به دست آورید.

حل. تابع داده شده را می‌توان به صورت مؤلفه‌ای زیر در نظر گرفت

$$f = \{(x,y) \ : \ y = ۲x^۳ - ۱\}.$$

بنابراین

$$f^{-۱} = \{(y,x) \ : \ y = ۲x^۳ - ۱\}.$$

در تعریف یک تابع نیاز داریم مؤلفهٔ دوم با رابطه‌ای برحسب مؤلفهٔ اول تعیین شود. در تابع $f^{-۱}$ چنین اتفاقی نیفتاده. برای رفع این مشکل باید x را برحسب y به دست آوریم. بدین منظور داریم

$$\begin{aligned}
y &= ۲x^۳ - ۱\\
y + ۱ &= ۲x^۳\\
\frac{y+۱}{۲} &= x^۳\\
\sqrt[۳]{\frac{y+۱}{۲}} &= x
\end{aligned}$$

پس $f^{-۱}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f^{-۱} = \left\{(y,x) \ : \ x = \sqrt[۳]{\frac{y+۱}{۲}}\right\} = \left\{\left(y, \sqrt[۳]{\frac{y+۱}{۲}}\right) \ : \ y \in \mathbb{R}\right\}.$$

یعنی $f^{-۱}(y) = \sqrt[۳]{\frac{y+۱}{۲}}$. با توجه به این که y یک متغیر آزاد است می‌توان به جای آن از نماد x هم استفاده کرد. لذا می‌توان نوشت

$$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}}.$$

مثال اخیر روشی را نشان می‌دهد که با استفاده از آن می‌توان وارون برخی توابع را محاسبه کرد. گام‌های آن را در ادامه بیان می‌کنیم.

برای محاسبهٔ وارون تابع یک‌به‌یک f به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. نماد $f(x)$ را با y جایگزین کنید.

۲. جای نماد x و y را با هم عوض کنید. یعنی هر جا x ظاهر شده y بگذارید و هر جا y هست x بگذارید.

۳. معادلهٔ حاصل را برحسب y حل کنید. یعنی y در یک طرف تنها، و سمت دیگر برحسب x باشد.

۴. به جای y قرار دهید $f^{-۱}(x)$.

۵. بررسی کنید که دامنهٔ f برد $f^{-۱}$ و برد f دامنهٔ $f^{-۱}$ باشد.

مثال ۳۵. تابع وارون $f(x) = \sqrt{x+۲} - ۳$ را به دست آورید.

حل. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $D_f = [-۲, \infty)$ و $R_f = [-۳, \infty)$. گام‌های روش یاد شده را به صورت زیر انجام می‌دهیم

۱. جایگزینی y به جای $f(x)$

$$y = \sqrt{x+۲} - ۳.$$

۲. جایگزینی x و y به جای هم

$$x = \sqrt{y+۲} - ۳$$

۳. حل بر حسب y

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y+۲} - ۳ \\ x+۳ &= \sqrt{y+۲} \\ (x+۳)^۲ &= y+۲ \qquad \text{با فرض نامنفی بودن } x+۳ \\ (x+۳)^۲ - ۲ &= y \end{aligned}$$

۴. جایگزینی $f^{-۱}(x)$ به جای y

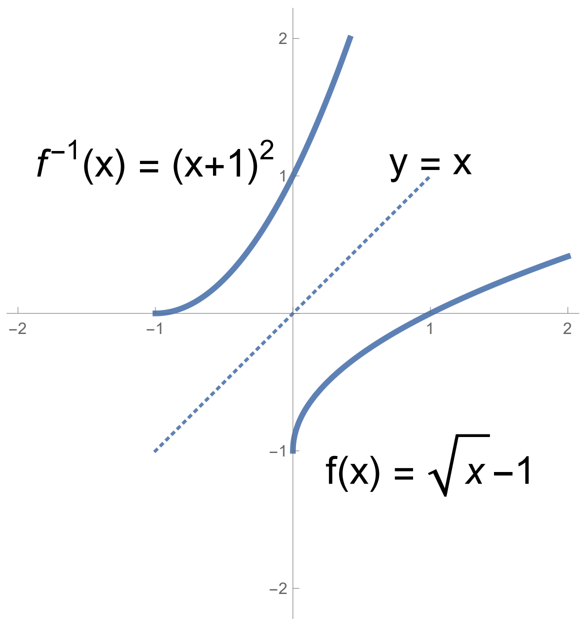
$$f^{-۱}(x) = (x+۳)^۲ - ۲$$

۵. در گام ۳ دیدیم که شرط $x + ۳ \geq ۰$ یا به طور معادل $x \geq -۳$ ضروری است. بنابراین $D_{f^{-۱}} = [-۳, \infty)$ که همان برد f است. به راحتی دیده می‌شود که $R_{f^{-۱}} = [-۲, \infty)$ که برابر با دامنهٔ f است.

توجه کنید که در برخی مواقع نمی‌توان ضابطهٔ تابع وارون یک تابع را به طور صریح محاسبه کرد. مانند توابع وارون تابع‌های مثلثاتی.

مثال ۳۶ (نمودار تابع وارون). تابع $f(x) = \sqrt{x} - ۱$ تابعی یک‌به‌یک است. تابع وارون آن $f^{-۱}$ را به دست آورده و نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل. با استفاده از روشی که پیشتر گفته شد می‌توان نشان داد $f^{-۱}(x) = (x + ۱)^۲$. نمودار این دو تابع را با استفاده از انتقال‌ها می‌توان به صورت زیر رسم کرد



با توجه به مثال فوق می‌توان نکتهٔ زیر را در مورد نمودار تابع وارون بیان کرد

نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ است.

بخش ۲

توابع خاص

در این بخش با توابع پرکاربرد در ریاضی و ویژگی‌های اصلی آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱.۲ تابع نمایی و لگاریتم

در توابعی که تا کنون با آن‌ها آشنا شدیم، اغلب چنین شکلی دیده می‌شود:

$$f(t) = t^{۲}, \qquad g(x) = x^{\frac{۱}{۵}}$$

توابعی که یک متغیر به توان کسری یا عدد صحیح می‌رسد. به چنین توابعی جبری می‌گوییم. اما نوع دیگری از توابع وجود دارند که در آن‌ها به جای این که یک متغیر به توان یک عدد ثابت برسد، یک عدد ثابت به توان یک متغیر می‌رسد مانند

$$h(t) = ۲^{t}, \qquad f(x) = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}$$

این تابع‌ها را نمایی گوییم.

تعریف ۱۴ (توابع نمایی). یک تابع نمایی با پایهٔ a تابعی به صورت زیر است

$$f(x) = a^{x},$$

که در آن x یک عدد حقیقی و $a > ۰$ و $a \neq ۱$.

در این تعریف فرض کرده‌ایم پایه نمی‌تواند ۱ باشد، زیرا تابع $f(x) = ۱^{x}$ در واقع همان تابع ثابت $f(x) = ۱$ است. همچنین فرض می‌کنیم پایه عددی منفی نیست زیرا منفی بودن پایه موجب تناقض‌هایی می‌شود که به یکی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. با استفاده

از قواعدی که برای توان می‌دانیم می‌توان نوشت

$$(-۱)^{\frac{۶}{۲}} = \left((-۱)^{۶}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱^{\frac{۱}{۲}} = ۱.$$

از طرفی

$$(-۱)^{\frac{۶}{۲}} = (-۱)^{۳} = -۱.$$

واضح است که چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین فعلاً اجازه نمی‌دهیم پایه عددی منفی باشد.

در تعریف ملاحظه می‌کنید که ما دامنهٔ تابع نمایی را اعداد حقیقی تعریف کرده‌ایم. در نگاه اول ممکن است این خیلی طبیعی به نظر برسد چون در بیشتر محاسبات مقدار یک تابع نمایی را برای اعداد گویا محاسبه کرده‌ایم. مثلاً با فرض $f(x) = ۳^x$ داریم

$$f(\frac{۳}{۵}) = ۳^{\frac{۳}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^۳} = \sqrt[۵]{۲۷} \approx ۱{,}۹۳۳۱۸.$$

اما مقدار $f(\sqrt{۲})$ را چه طور تعریف کنیم؟ برای تعریف چنین کمیتی به دو نکته توجه کنید: اول این که مقدار $\sqrt{۲}$ را می‌توان با یک عدد اعشاری (گویا) مانند r تقریب زد و دوم این که مقدار $f(r)$ قابل محاسبه است. برای توضیح بیشتر توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴۲\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴۲۱\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴۲۱۴\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴۲۱۳۶\\
\sqrt{۲} &\approx ۱{,}۴۱۴۲۱۳۵۶\\
&\vdots
\end{aligned}$$

حال اگر مقدار $f(x)$ را برای مقادیر تقریبی فوق محاسبه کنیم داریم

$$\begin{aligned}
۲^{۱/۴۱} &\approx ۴/۷۳۰۰۰۰۰۰\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴} &\approx ۴/۷۲۹۰۰۰۰۰\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴۲} &\approx ۴/۷۲۸۸۰۰۰۰\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴۲۱} &\approx ۴/۷۲۸۸۰۰۰۰\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴۲۱۴} &\approx ۴/۷۲۸۸۰۴۰\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴۲۱۳۶} &\approx ۴/۷۲۸۸۰۴۴\ldots \\
۲^{۱/۴۱۴۲۱۳۵۶} &\approx ۴/۷۲۸۸۰۴۳\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم همان طور که تقریب r از $\sqrt{۲}$ دقیق‌تر می‌شود، مقدار $f(r)$ به یک عدد خاص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. این عدد را به عنوان مقدار $f(\sqrt{۲}) = ۳^{\sqrt{۲}}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین با خیال راحت می‌توان گفت دامنهٔ توابع نمایی در تعریف ۱۴ همهٔ اعداد حقیقی است.

در ادامه به برخی از خواص توابع نمایی که از پیش با آن‌ها آشنایی دارید به طور خلاصه اشاره می‌کنیم

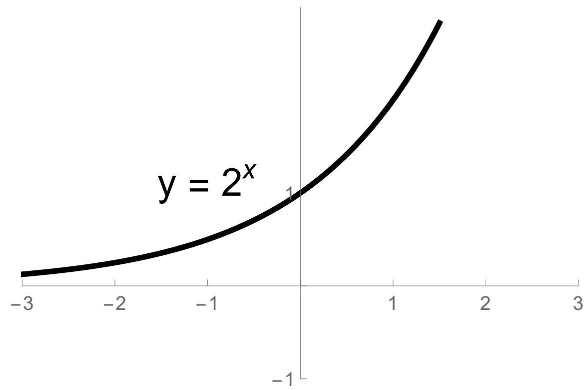
برای هر x و y داریم

$$\begin{aligned}
a^{x+y} &= a^x a^y \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\
a^{-x} &= \frac{۱}{a^x} = \left(\frac{۱}{a}\right)^x \\
a^{۰} &= ۱ \\
a^{xy} &= (a^x)^y = (a^y)^x
\end{aligned}$$

تابع نمایی $f(x) = ۲^x$ را در نظر بگیرید. برای رسم آن با چند مقدار شروع می‌کنیم

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$y = ۲^x$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸

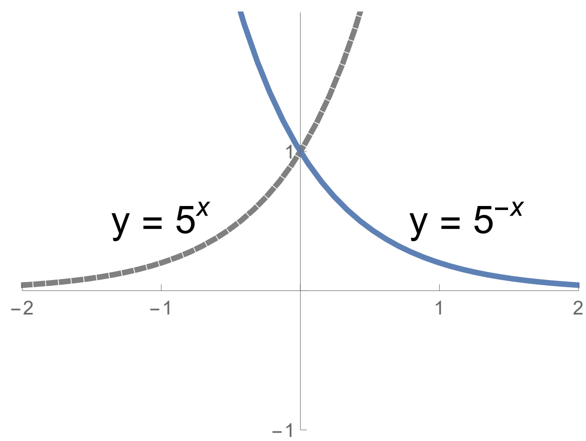
برای مقادیر منفی، مقدار تابع خیلی به صفر نزدیک می‌شود و رشد تابع برای مقادیر مثبت خیلی زیاد است. به عنوان مثال $f(۴) - f(۳)$ را مقایسه کنید با $f(۲) - f(۱)$. نمودار تابع $y = ۲^x$ به صورت زیر است



ویژگی‌های این نمودار میان تمامی توابع نمایی با $a > ۱$ مشترک است. مثلاً نمودار تابع $y = ۱۰^x$ نیز مشابه نمودار فوق است.
اینک نمودار تابع نمایی را برای یک مثال با $۰ < a < ۱$ بررسی می‌کنیم. تابع $f(x) = (\frac{۱}{۵})^x$ را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت

$$f(x) = (\frac{۱}{۵})^x = \frac{۱}{۵^x} = ۵^{-x}.$$

نمودار تابع $f(x) = ۵^{-x}$ با توجه به مطالبی که در بخش ۲.۱.۱ مطرح شد، قرینهٔ نمودار $y = ۵^x$ نسبت به محور y است. بنابراین نمودار $y = ۵^{-x}$ را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.



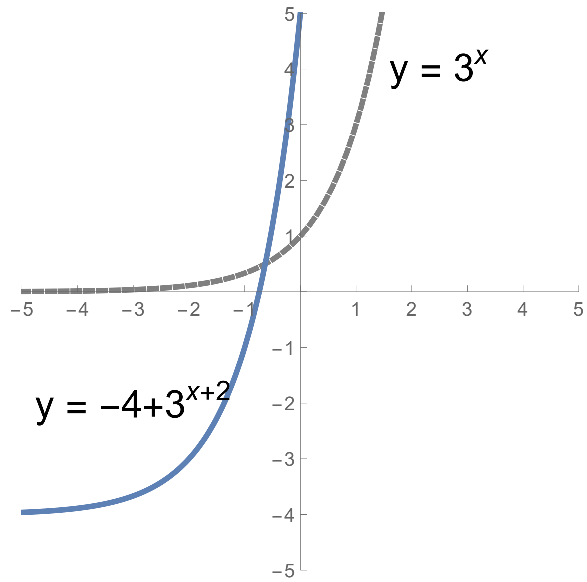
با توجه به نمودار تابع نمایی $y = a^x$ می‌توان ویژگی‌های زیر را برای این تابع برشمرد

- وقتی $a > ۱$ تابع صعودی و وقتی $۰ < a < ۱$ تابعی نزولی است،
- نمودار تابع در نقطهٔ $(۰, ۱)$ محور y را قطع می‌کند،
- نمودار تابع هیچ‌گاه محور x را قطع نمی‌کند ولی به میزان دلخواه به آن نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر محور x مجانب افقی تابع است،
- دامنهٔ تابع $(-\infty, \infty)$ و برد آن $(۰, \infty)$ است، و

- تابع یک‌به‌یک است.

مثال ۳۷. نمودار تابع $f(x) = -۴ + ۳^{x+۲}$ را رسم کنید.

حل. با توجه به نکاتی که در بخش نمودار توابع گفته شد، نمودار این تابع را می‌توان با انتقال افقی و عمودی نمودار $y = ۳^x$ به دست آورد. در مورد نمودارهایی مانند نمودار توابع نمایی که مجانب دارند، مجانب را هم براساس انتقال داده شده تغییر می‌دهیم. نمودار مورد سوال با انتقال عمودی ۴ واحد به پایین و انتقال افقی ۲ واحد به چپ از نمودار $y = ۳^x$ به دست می‌آید.



از ویژگی یک‌به‌یک بودن توابع نمایی می‌توان برای حل برخی معادلات شامل توابع نمایی استفاده کرد. بدین شکل که اگر $x_۱$ و $x_۲$ چنان باشند که $a^{x_۱} = a^{x_۲}$ آنگاه (چون تابع a^x یک‌به‌یک است) داریم $x_۱ = x_۲$.

مثال ۳۸. مقدار x را طوری به دست آورید که $۴^x = \frac{۱}{۴}$.

حل. با توجه به رابطهٔ داده شده داریم

$$۴^x = \frac{۱}{۴}$$

$$۴^x = ۴^{-۱}$$

$$x = -۱$$

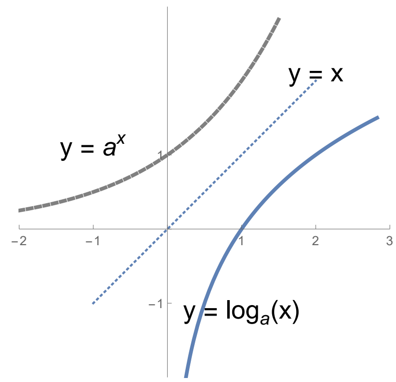
تابع نمایی یک تابع یک‌به‌یک است، تابع وارون آن را تابع لگاریتمی گوییم به طور دقیق‌تر

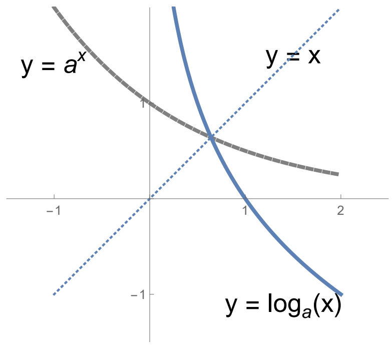
برای $a > ۰$ و $a \neq ۱$ تابع وارون تابع نمایی $g(x) = a^x$ را تابع لگاریتمی با پایهٔ a گوییم و آن را با $f(x) = \log_a(x)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$y = \log_a(x) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a^y = x$$

معمولاً وقتی پایه برابر ۱۰ است آن را در نماد لگاریتم نمی‌نویسیم یعنی $\log \equiv \log_{10}$.

با توجه به تعریف تابع لگاریتمی، نمودار آن با یافتن قرینهٔ نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y = x$ به صورت زیر به دست می‌آید.





نمودار $\log_a(x)$ برای $a > 1$ نمودار $\log_a(x)$ برای $0 < a < 1$

با توجه به نمودار تابع لگاریتمی، خواص زیر را می‌توان برای آن برشمرد

- وقتی $a > 1$ تابع صعودی و وقتی $0 < a < 1$ تابعی نزولی است،
- نمودار تابع در نقطهٔ $(1, 0)$ محور x را قطع می‌کند،
- نمودار تابع هیچ‌گاه محور y را قطع نمی‌کند ولی به میزان دلخواه به آن نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر محور y مجانب عمودی تابع است،
- دامنهٔ تابع $(0, \infty)$ و برد آن $(-\infty, \infty)$ است، و
- تابع یک‌به‌یک است.

مثال ۳۹. نشان دهید برای هر x و y داریم $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

حل. فرض کنیم $\alpha = \log_a x$ و $\beta = \log_a y$. در این صورت با استفاده از تعریف تابع لگاریتمی می‌توان نوشت

$$x = a^{\alpha}, \qquad y = a^{\beta}. \tag{۱.۲}$$

به طور مشابه با فرض $\gamma = \log_a(xy)$ می‌توان نوشت

$$xy = a^{\gamma}. \tag{۲.۲}$$

پس رابطهٔ مورد سوال با این نام‌گذاری معادل است با $\gamma = \alpha + \beta$. اینک، از (۱.۲) داریم $xy = a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ و از طرف دیگر از (۲.۲) داریم $xy = a^{\gamma}$. در نتیجه $a^{\alpha+\beta} = a^{\gamma}$. چون تابع نمایی یک‌به‌یک است، پس $\gamma = \alpha + \beta$. این دقیقاً رابطهٔ مورد نظر سوال است.

مثال ۴۰. نشان دهید برای هر عدد حقیقی r داریم $\log_a(x^r) = r\log_a x$.

حل. روندی مشابه مثال قبل را برای حل این سوال انجام می‌دهیم. فرض کنیم $\alpha = \log_a(x^r)$ و $\beta = \log_a x$. در این صورت کافی است نشان دهیم $\alpha = r\beta$. از $\alpha = \log_a(x^r)$ نتیجه می‌شود

$$x^r = a^\alpha. \tag{۳.۲}$$

و از $\beta = \log_a x$ نتیجه می‌شود $x = a^\beta$. بنابراین

$$x^r = (a^\beta)^r = a^{r\beta}. \tag{۴.۲}$$

اینک از روابط (۳.۲) و (۴.۲) داریم $a^{r\beta} = a^\alpha$. چون تابع نمایی یک‌به‌یک است پس $\alpha = r\beta$. و این نتیجهٔ مطلوب ماست.

برخی از خواص تابع لگاریتمی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد

- برای هر x، y و r داریم

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a x$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- داریم $\log_a ۱ = ۰$ زیرا $a^۰ = ۱$.
- داریم $\log_a a = ۱$ زیرا $a^۱ = a$.
- داریم $\log_a a^x = x$ و $a^{\log_a x} = x$ زیرا تابع لگاریتمی تابع وارون تابع نمایی است.
- اگر $\log_a x = \log_a y$ آنگاه $x = y$ زیرا تابعی لگاریتمی تابعی یک‌به‌یک است.
- قانون تغییر پایه

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

مثال ۴۱. هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت لگاریتمی بنویسید.

(الف) $\frac{۱}{۲}\log(x^۲+۴)$، (ب) $\log x - ۲(\log(x+۲) + \log(x-۲))$.

حل. (الف)

$$\frac{۱}{۲}\log(x^۲+۴) = \log(x^۲+۴)^{\frac{۱}{۲}} = \log\sqrt{x^۲+۴}.$$

(ب)

$$\begin{aligned}\log x - ۲[\log(x+۲) + \log(x-۲)] &= \log x - ۲\log((x+۲)(x-۲)) = \log x - ۲\log(x^{۲} - ۴)\\ &= \log x - \log(x^{۲} - ۴)^{۲}\\ &= \log x - \log(x^{۴} - ۸x^{۲} + ۱۶)\\ &= \log\left(\frac{x}{x^{۴} - ۸x^{۲} + ۱۶}\right)\end{aligned}$$

مثال ۴۲. دامنهٔ تابع $f(x) = \log(x-۱) - \log(x+۱)$ را به دست آورید.

حل. داریم $f(x) = \log\frac{x-۱}{x+۱}$. بنابراین

$$D_f = \left\{x \in D_{\frac{x-۱}{x+۱}} \ : \ \frac{x-۱}{x+۱} \in D_{\log}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-۱\} \ : \ \frac{x-۱}{x+۱} > ۰\right\}$$

با تعیین علامت $\frac{x-۱}{x+۱}$ دامنهٔ f به صورت $D_f = (-\infty, -۱) \cup [۱, \infty)$ به دست می‌آید.

تعریف ۱۵ (عدد نپر). در بسیاری از کاربردها ثابت زیر که آن را با نام عدد نپر می‌شناسیم و با e نشان می‌دهیم ظاهر می‌شود

$$e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸\cdots$$

عدد نپر یک عددی اصم است. راه‌های مختلفی برا تقریب آن وجود دارد که یکی از آنها استفاده از تابع $f(x) = \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}$ برای مقادیر بزرگ x است. هر چقدر مقدار x بزرگتر باشد مقدار $f(x)$ به عدد e نزدیک‌تر خواهد بود. تابع لگاریتم در پایهٔ عدد نپر را با $\ln$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴۳. برای هر a و b نشان دهید $a^b = e^{b\ln a}$.

حل. فرض کنیم $\alpha = b\ln a$. در این صورت $\alpha = \ln a^b$. در نتیجه بنا به تعریف تابع لگاریتم $a^b = e^{\alpha}$ و این همان رابطهٔ مورد سوال است.

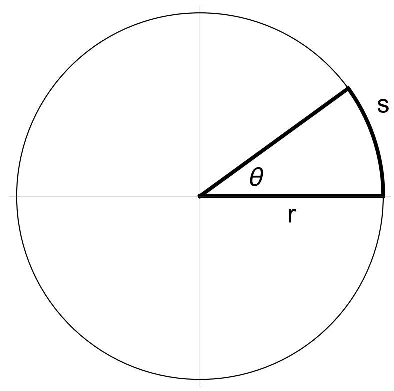
۲.۲ توابع مثلثاتی

در این بخش با توابع مثلثاتی و خواص پایه‌ای آن‌ها آشنا می‌شویم. برای شروع باید زاویه و روش اندازه‌گیری آن را یادآوری کنیم.

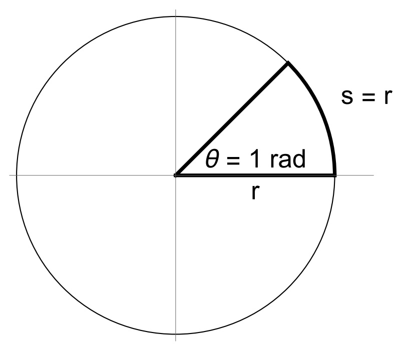
پاره‌خط ℓ به طول r را در نظر بگیرید که آن را حول یکی از دو انتهایش در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌دهیم تا پاره‌خط ℓ' حاصل شود. در این صورت یک زاویه به دست می‌آید که رأس آن انتهای ثابت پاره‌خط، ضلع ابتدایی آن ℓ و ضلع انتهایی آن ℓ'

است. این زاویه قطاع s از محیط دایرهٔ به مرکز راس زاویه و شعاع r را ایجاد می‌کند. برای اندازه‌گیری مقدار دوران که آن را با θ نشان می‌دهیم از نسبت طول s به r استفاده می‌کنیم و واحد اندازه‌گیری نسبت حاصل را رادیان می‌نامیم

$$\theta = \frac{s}{r}.$$



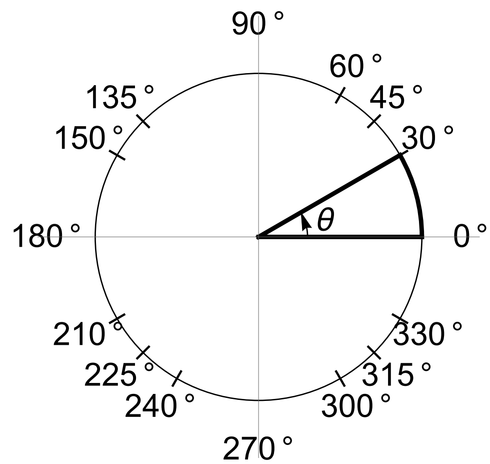
مثلاً θ وقتی برابر عدد ۱ رادیان است که طول قطاع یعنی s با شعاع دایره برابر شود. توجه کنید که طول شعاع دایره بر تعریف رادیان تاثیری ندارد.



اگر دوران کل دایره را شامل شود یعنی پاره‌خط ℓ را آنقدر دوران دهیم که روی خودش بیفتد. در این صورت زاویهٔ θ برابر است با ۲π رادیان زیرا

$$\theta = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi$$

راه دیگر برای اندازه‌گیری زاویه‌ای که پیشتر تعریف کردیم این است که دایره را به ۳۶۰ بخش تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک درجه می‌نامیم. درجه را با نما $^\circ$ نشان می‌دهیم. شکل زیر برخی از زوایا را برحسب درجه نشان می‌دهد.



بنابراین با دو روش می‌توانیم زاویه‌ها را اندازه‌گیری کنیم. از یک طرف کل دایره ۳۶۰° است و از طرف دیگر ۲π رادیان. پس

$$۱^\circ = \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}, \qquad \text{رادیان}\ ۱ = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$$

اگر دوران خط ℓ را در جهت ساعت‌گرد انجام دهیم علامت زاویهٔ حاصل را منفی قرار می‌دهیم.

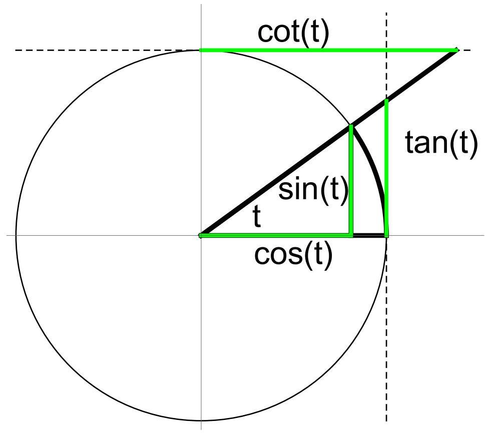
در ادامه سه نسبت مثلثاتی مربوط به یک زاویه و وارون‌های آن‌ها را تعریف می‌کنیم.

sine	cosecant
cosine	secant
tangent	cotangent

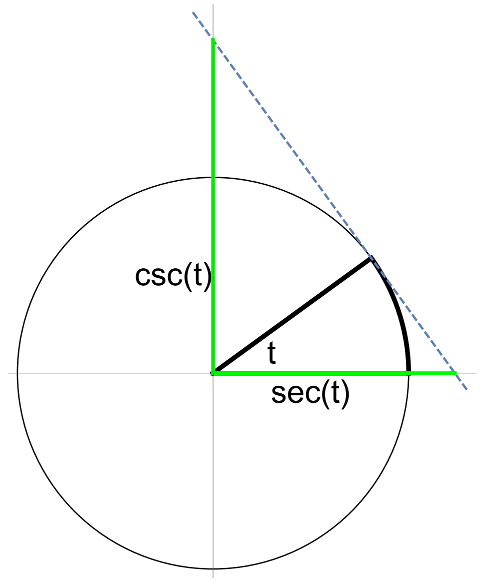
دایرهٔ با شعاع واحد را در نظر بگیرید. فرض کنیم (x, y) یک نقطه روی دایره و t اندازهٔ زاویهٔ مربوط به این نقطه باشد. در این صورت نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\sin t = y \qquad \csc t = \frac{۱}{y},\ y \neq ۰$$
$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{۱}{x},\ x \neq ۰$$
$$\tan t = \frac{y}{x},\ x \neq ۰ \qquad \cot t = \frac{x}{y},\ y \neq ۰$$

از اینجا معلوم می‌شود رابطهٔ زیر همواره درست است $\sin^۲ t + \cos^۲ t = ۱$. نسبت‌های مثلثاتی را می‌توان به صورت زیر روی دایره نشان داد



نسبت‌های مثلثاتی sec و csc را نیز می‌توان به صورت زیر روی دایره نشان داد. در این شکل خط‌چین در نقطهٔ (x, y) بر دایره مماس است.



این که موارد اشاره شده در شکل‌ها با تعریف نسبت‌های مثلثاتی هم‌خوانی دارند با پیدا کردن دو مثلث متشابه و نوشتن نسبت اضلاع آن‌ها اثبات می‌شود.

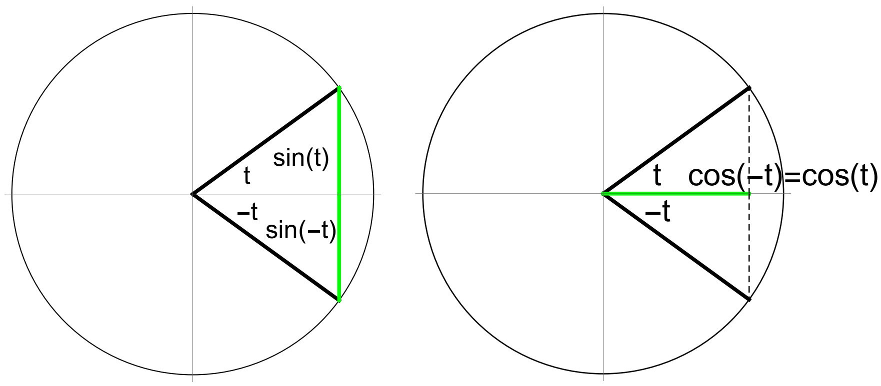
چون نقطهٔ (x, y) روی دایره به شعاع یک است پس $۰ \leq x, y \leq ۱$. از این نتیجه می‌شود $۰ \leq \sin t, \cos t \leq ۱$. پس به عنوان یک تابع برد $\sin t$ و $\cos t$ بازهٔ $[-۱, ۱]$ است. واضح است که دامنهٔ این دو تابع اعداد حقیقی‌اند. با اضافه کردن ۲π به هر یک از اعداد بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ مقدار سینوس و کسینوس تغییری نمی‌کند. در واقع داریم

$$\sin(t + ۲\pi n) = \sin t, \qquad n \in \mathbb{N}$$

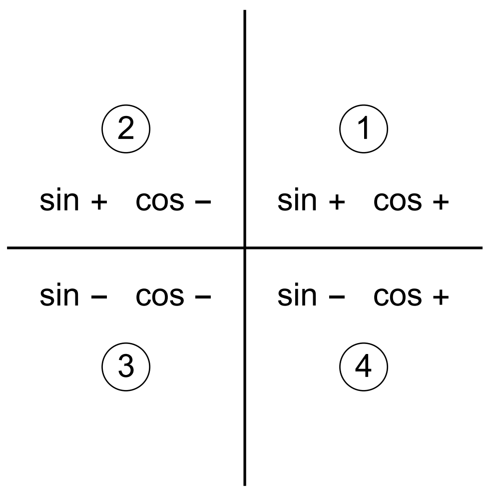
$$\cos(t + ۲\pi n) = \cos t, \qquad n \in \mathbb{N}$$

بنابراین کافی است شکل نمودار را فقط در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ بدانیم. به توابعی که چنین خاصیتی دارند تابع متناوب گفته می‌شود. بازه‌ای را که شکل تابع در آن تکرار می‌شود دورهٔ تناوب گوییم. نکتهٔ دیگر این که نمودار تابع سینوس نسبت به مبدأ مختصات و نمودار

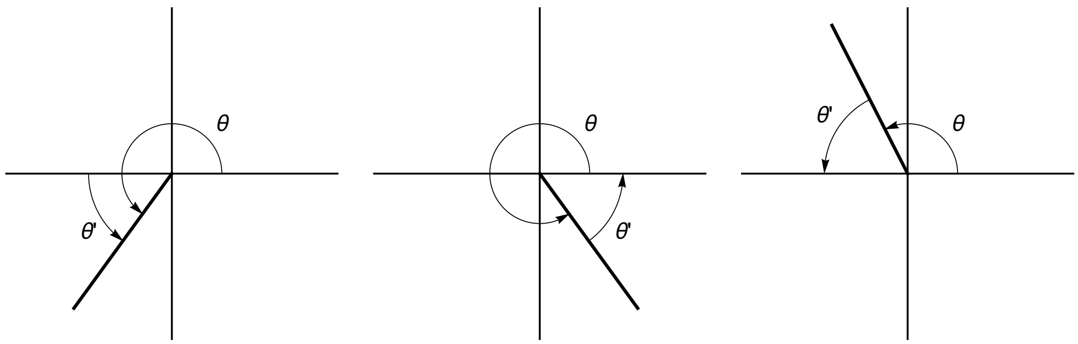
تابع کسینوس نسبت به محور y متقارن‌اند. این موضوع را به راحتی با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی می‌توان دریافت. بدین منظور زاویهٔ t را در نظر بگیرید و مقدار $\sin t$ را روی دایره نشان دهید. اینک زاویهٔ $-t$ را روی همان شکل پیدا کنید و مقدار $\sin(-t)$ را بیابید. ملاحظه می‌کنید که $\sin(-t) = -\sin(t)$. این نشان می‌دهد نمودار سینوس نسبت به مبدأ متقارن است. به طور مشابه برای تابع کسینوس هم می‌توان نشان داد $\cos(-t) = \cos t$. یعنی این نمودار نسبت به محور y متقارن است.



با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان علامت آن‌ها را در نواحی چهارگانهٔ دستگاه مختصات به صورت زیر تعیین کرد.



در ادامه روشی را برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای دلخواه مطرح می‌کنیم. نکتهٔ اصلی بحث این است که کافی است نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای بین ۰ تا $\pi/۲$ بدانیم. سایر زوایا را می‌توان با استفاده از این مقادیر محاسبه نمود. بدین منظور زاویهٔ مرجع را تعریف می‌کنیم. برای زاویهٔ داده شدهٔ θ زاویهٔ حاده (کمتر از ۹۰ درجه) میان محور x و انتهای زاویهٔ θ را زاویهٔ مرجع گوییم و آن را با θ' نشان می‌دهیم. به شکل‌های زیر توجه کنید.



در واقع اگر زاویهٔ θ در ناحیهٔ دوم باشد آنگاه $\theta' = \pi - \theta$، اگر θ در ناحیهٔ سوم باشد آنگاه $\theta' = \theta - \pi$ و اگر θ در ناحیهٔ چهارم باشد آنگاه $\theta' = ۲\pi - \theta$. برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای دلخواه ابتدا زاویهٔ مرجع مربوط به آن را پیدا می‌کنیم. پس از محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویهٔ مرجع با توجه به این که ضلع انتهایی زاویه در کدام ناحیه قرار می‌گیرد، علامت نسبت مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

مثال ۴۴. نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را به دست آورید. (الف) $\frac{۵}{۶}\pi$، (ب) $\frac{۱۵}{۱۱}\pi$، (پ) $-۰٫۵$.

حل. (الف) برای $\theta = \frac{۵}{۶}\pi$ داریم $\theta' = \frac{\pi}{۶}$. ابتدا نسبت‌های مثلثاتی θ' را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\sin(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}, \qquad \cos(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حال چون θ در ناحیهٔ دوم است پس علامت $\sin$ مثبت و علامت $\cos$ منفی است. در نتیجه

$$\sin(\frac{۵}{۶}\pi) = \frac{۱}{۲}, \qquad \cos(\frac{۵}{۶}\pi) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ب) برای این بخش داریم $\theta' = \frac{۱۵}{۱۱}\pi - \pi = \frac{۴}{۱۱}\pi$. از طرفی (با استفاده از ماشین حساب) داریم $\sin(\frac{۴}{۱۱}\pi) = ۰٫۹۰۹۶۳۲$ و $\cos(\frac{۴}{۱۱}\pi) = ۰٫۴۱۵۴۱۵$. اینک چون θ در ناحیهٔ سوم است پس $\sin(\frac{۱۵}{۱۱}\pi) = -۰٫۹۰۹۶۳۲$ و $\cos(\frac{۱۵}{۱۱}\pi) = -۰٫۴۱۵۴۱۵$.

(پ) توجه کنید که در این بخش واحد زاویه رادیان است. چون علامت زاویه منفی است پس در جهت پادساعتگرد باید دوران را انجام دهیم. از طرفی چون $-\frac{\pi}{۲} < -۰٫۵$، پس زاویه در ناحیهٔ چهارم قرار می‌گیرد. اما محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی این زاویه کار آسانی است، زیرا از قبل می‌دانیم

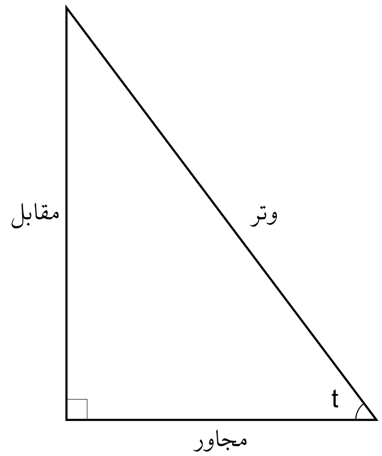
$$\sin(-۰٫۵) = -\sin(۰٫۵) = -۰٫۴۷۹۴۲۶, \qquad \cos(-۰٫۵) = \cos(۰٫۵) = ۰٫۸۷۷۵۸۳.$$

مثال ۴۵. فرض کنیم θ زاویه‌ای باشد که $\sin\theta = ۰٫۸۴۱۴۷۱$. آیا با همین داده می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را تعیین کرد؟ اگر بدانیم θ در ناحیهٔ دوم است چطور؟

حل. توجه کنید دو زاویه وجود دارند که سینوس آن‌ها برابر با مقدار یاد شده است. یکی در ناحیهٔ اول و دیگری در ناحیهٔ سوم. بنابراین مقدار داده شده به تنهایی نمی‌تواند یک زاویه را برای ما مشخص کند. با دانستن بخش دوم معلوم می‌شود $\cos\theta < ۰$. بنابراین

$$\cos\theta = -\sqrt{۱ - \sin^{۲}\theta} = -\sqrt{۱ - ۰٫۸۴۱۴۷۱^{۲}} = -۰٫۵۴۰۳۰۲.$$

نسبت‌های مثلثاتی را با استفاده از مثلث قائم الزاویه نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد. مثلث قائم الزاویهٔ زیر را در نظر بگیرید که t یکی از زوایای غیر قائم آن است.



در این صورت نسبت‌های مثلثاتی اصلی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\sin t = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}, \quad \cos t = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}, \quad \tan t = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

اگر در همین مثلث زاویهٔ دیگر غیر قائم را t' بنامیم، نقش ضلع مقابل و مجاور با هم عوض می‌شود و می‌توان گفت

$$\sin t' = \cos t, \qquad \cos t' = \sin t.$$

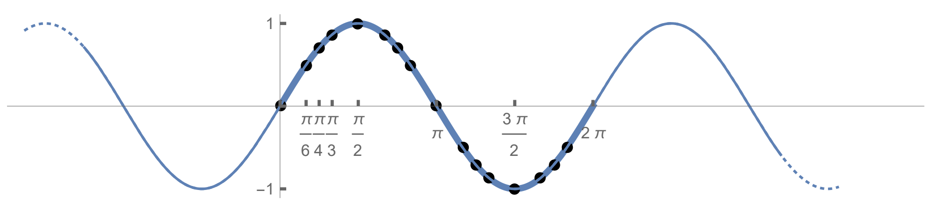
از طرفی با توجه به این که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر π است داریم $t + t' + \frac{\pi}{2} = \pi$. پس $t' = \frac{\pi}{2} - t$. در نتیجه

$$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t, \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t.$$

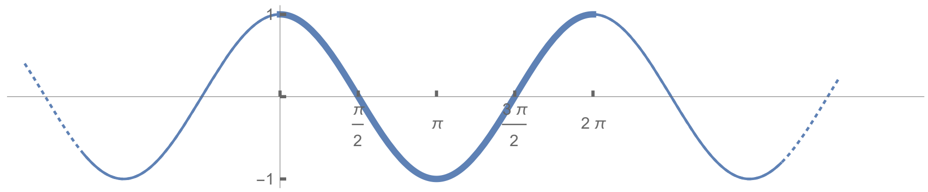
این نشان می‌دهد که اگر ما بتوانیم نمودار $\sin t$ را رسم کنیم، آنگاه، نمودار $\cos t$ با انتقال افقی و انعکاس آن نسبت به محور y به دست می‌آید.

اینک با استفاده از جدول مقادیر برای تابع $\sin$ می‌توانیم نمودار آن را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنیم. از آنجا که این تابع متناوب است در خارج از این بازه کافیست نمودار را تکرار کنیم.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$



با توجه به نکات گفته شده، نمودار $y=\cos t$ به صورت زیر به دست می‌آید



ویژگی‌های توابع $\sin$ و $\cos$ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

- نمودار تابع $\sin$ محور x را در نقاط $۰,\pm\pi,\pm ۲\pi,\cdots$ و نمودار تابع $\cos$ محور x را در نقاط $\pm\frac{\pi}{۲},\pm\frac{۳}{۲}\pi,\cdots$ قطع می‌کنند،
- نمودار تابع $\sin$ محور y را در نقطهٔ $(۰,۰)$ و نمودار تابع $\cos$ محور y را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کند،
- توابع $\sin$ و $\cos$ متناوب هستند و در بازه‌های با طول ۲π شکل یکسان دارند،
- دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها بازهٔ $[-۱,۱]$ است،
- تابع $\sin$ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک‌به‌یک است،
- تابع $\cos$ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی روی بازهٔ $[۰,\pi]$ یک‌به‌یک است.

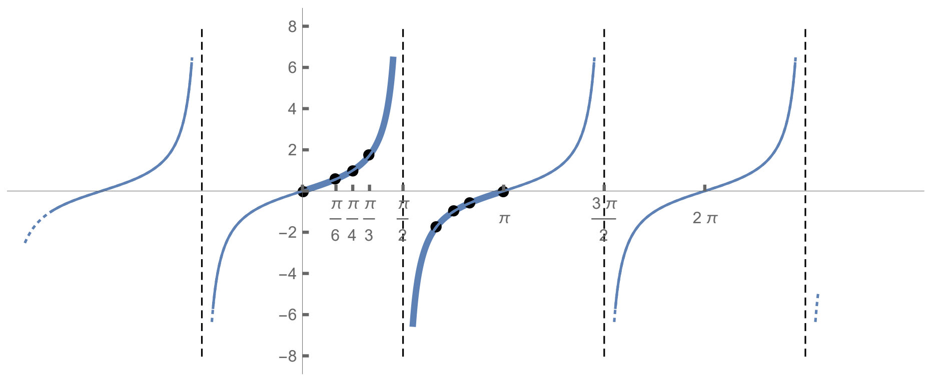
توجه کنید که ویژگی‌های سایر توابع مثلثاتی را می‌توان با استفاده از این دو تابع به دست آورد. با تابع $\tan t$ آغاز می‌کنیم. داریم

$$\tan(-t)=\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t.$$

یعنی نمودار این تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. از طرفی برای هر t داریم

$$\tan(t+\pi)=\frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}=\frac{-\sin t}{-\cos t}=\tan t.$$

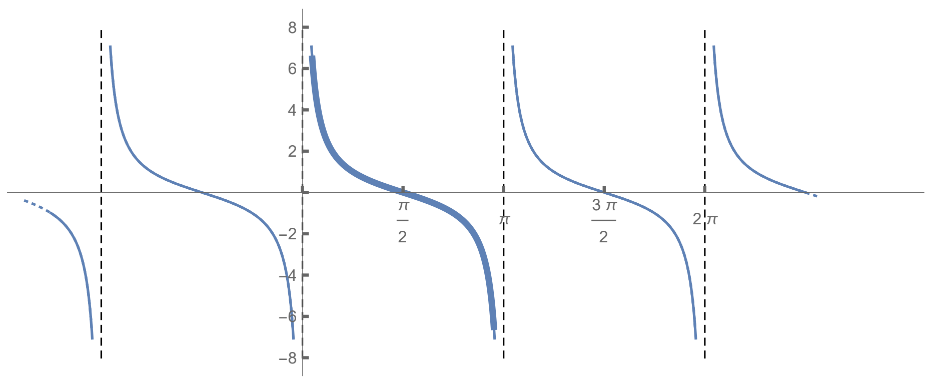
یعنی تابع $\tan t$ متناوب با دورهٔ تناوب π است. لذا اگر نمودار تابع را در بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم کنیم با تکرار آن در خارج از این بازه نمودار تابع حاصل می‌شود. از جدول مربوط به مقادیر $\sin$ استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۲}$ در دامنهٔ تابع نیست زیرا $\cos\frac{\pi}{۲}=۰$. نمودار تابع $y=\tan t$ به صورت زیر به دست می‌آید



برای رسم نمودار تابع $y = \cot t$ کافی است به این نکته توجه کنیم که

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} - t)}{\cos(\frac{\pi}{۲} - t)} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t.$$

یعنی نمودار تابع $y = \cot t$ با انتقال افقی و انعکاس نسبت به محور y نمودار $y = \tan t$ به دست می‌آید.



ویژگی‌های این دو تابع را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

- نمودار تابع $\tan$ محور x را در نقاط $۰, \pm\pi, \pm ۲\pi, \cdots$ و نمودار تابع $\cot$ محور x را در نقاط $\pm\frac{\pi}{۲}, \pm\frac{۳}{۲}\pi, \cdots$ قطع می‌کنند،
- نمودار تابع $\tan$ خیلی به خط $x = \frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شود ولی هیچگاه آن را قطع نمی‌کند. یعنی $x = \frac{\pi}{۲}$ مجانب عمودی این تابع است. خطوط $x = \pm\frac{\pi}{۲}$، $x = \pm\frac{۳}{۲}\pi$، $\cdots$ همگی چنین خاصیتی دارند. به طور مشابه، خطوط $x = ۰$ ، $x = \pm\pi$، $x = \pm ۲\pi$، $\cdots$، خطوط مجانب تابع $\cot$ هستند.
- توابع $\tan$ و $\cot$ متناوب هستند و در بازه‌های با طول π شکل یکسان دارند،

- دامنهٔ این دو تابع به صورت زیر است

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -\frac{۳}{۲}\pi, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳}{۲}\pi, \cdots\}$$

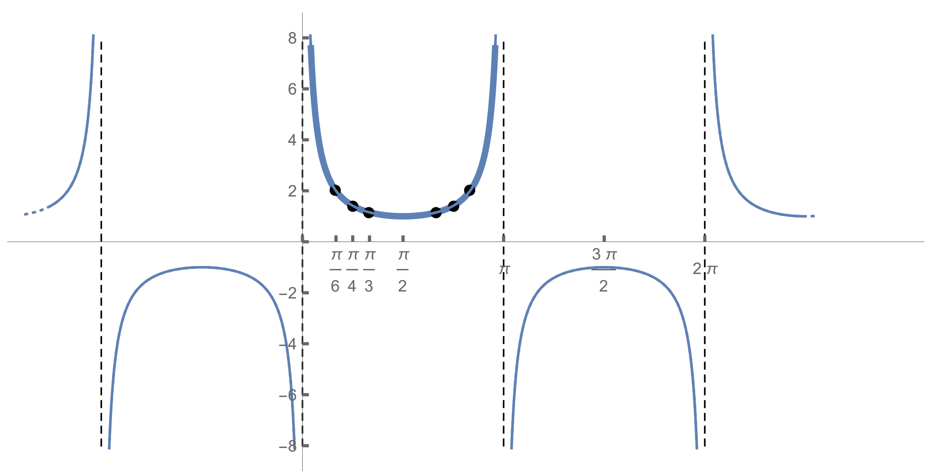
$$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi, \cdots\}$$

- برد هر دو تابع $(-\infty, \infty)$ است.

- تابع $\tan$ روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ یک‌به‌یک است،

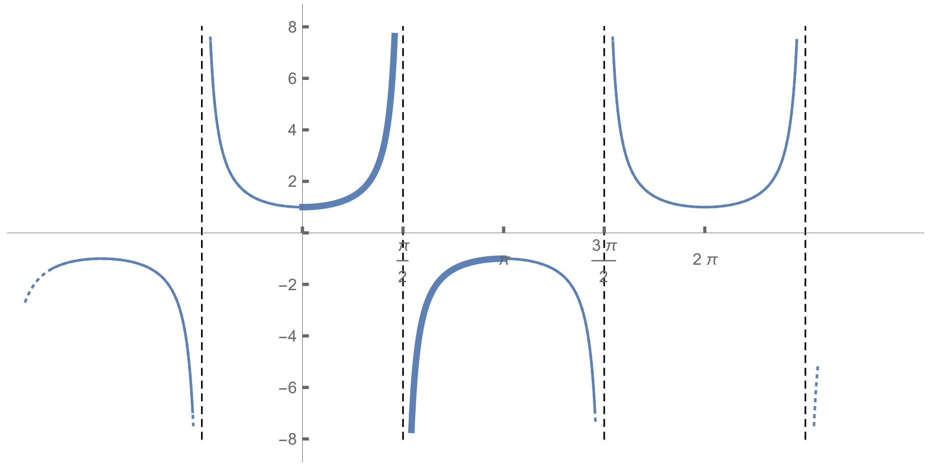
- تابع $\cot$ روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی روی بازهٔ $(۰, \pi)$ یک‌به‌یک است.

در ادامه ویژگی‌های تابع $y = \csc t$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف، این تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است. مانند تابع $\sin t$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. با استفاده از جدول مقادیر تابع $\sin t$ می‌توان نمودار این تابع را به صورت زیر رسم کرد



نمودار تابع $y = \sec t$ با انتقال افقی و انعکاس نمودار $y = \csc t$ به دست می‌آید زیرا

$$\csc(\frac{\pi}{۲} - t) = \frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲} - t)} = \frac{۱}{\cos t} = \sec t$$



ویژگی‌های این دو تابع را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

- نمودار توابع csc و sec محور x را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند،
- خطوط $x = ۰$ ، $x = \pm\pi$، $x = \pm ۲\pi$، $\cdots$، خطوط مجانب تابع csc و خطوط $x = \pm\frac{\pi}{۲}$، $x = \pm\frac{۳}{۲}\pi$، $\cdots$ خطوط مجانب عمودی نمودار تابع sec هستند.
- توابع csc و sec متناوب هستند و در بازه‌های با طول ۲π شکل یکسان دارند،
- دامنهٔ این دو تابع به صورت زیر است

$$D_{\csc} = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi, \cdots\}$$
$$D_{\sec} = \mathbb{R} \setminus \{\cdots, -\frac{۳}{۲}\pi, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳}{۲}\pi, \cdots\}$$

- بازهٔ $(-۱, ۱)$ در برد این دو تابع نیست. زیرا برای هر t داریم $-۱ \leq \sin t \leq ۱$. در نتیجه $\csc t = \frac{۱}{\sin t} \geq ۱$ یا $\csc t \leq -۱$.
- تابع csc روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی روی دو بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, ۰)$ و $(۰, \frac{\pi}{۲}]$ یک‌به‌یک است،
- تابع sec روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی روی دو بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲}, \pi]$ یک‌به‌یک است.

در ادامه به چند رابطهٔ مهم میان نسبت‌های مثلثاتی اشاره می‌کنیم

فرمول‌های مثلثاتی شامل مجموع و تفاضل دو زاویه

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \beta$ و از جمع استفاده کنیم فرمول‌های نصف زاویه به دست می‌آیند.

$$\sin(۲\alpha) = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(۲\alpha) = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$$

فرمول‌های حاصلضرب توابع مثلثاتی

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$$

مثال ۴۶. نشان دهید

$$\sin(۲\alpha) = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}.$$

حل. از سمت راست شروع می‌کنیم.

$$\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan\alpha} = \frac{۲\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{۱+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} = \frac{۲\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} = \frac{۲\sin\alpha}{\frac{۱}{\cos\alpha}} = ۲\sin\alpha\cos\alpha = \sin ۲\alpha.$$